

A2 TEORÍA DE CIRCUITOS

CAPÍTULO 4

TEOREMAS DE REDES

Cátedra de Teoría de Circuitos

Edición 2018

4. TEOREMAS DE REDES

Introducción:

Hasta este momento hemos trabajado con circuitos relativamente simples constituidos por elementos pasivos de valores constantes y alimentados por fuentes continuas, utilizando para su análisis las leyes de Kirchhoff, Ohm y los métodos sistemáticos: mallas, nudos y bucles. En este capítulo aprenderemos técnicas que nos simplificarán el análisis de los circuitos, así como otras que nos permitirán analizar el caso en que algún parámetro se modifique, o determinar el estado de régimen de una rama en particular del circuito. Estas técnicas se introducirán bajo el nombre de “teoremas”.

Para la aplicación de algunos de estos teoremas surgirá por primera vez la necesidad de exigir a los circuitos que cumplan con dos importantes propiedades: la **linealidad** y la **invariancia en el tiempo**, cuyo significado analizaremos a continuación.

4.1 Linealidad e invariancia en el tiempo

a) Linealidad

Para entender el concepto de linealidad asociado a un circuito es necesario estudiar la linealidad de los elementos que lo componen. Así, en cada elemento elegimos una variable, tensión o corriente, como entrada y la restante pasa a hacer la salida. Luego, el elemento será lineal si cuando la entrada se multiplica por una constante cualquiera, la salida resulta multiplicada por la misma constante y, en un caso más general, la respuesta a una entrada compuesta por la suma de dos o más señales es simplemente la suma de las respuestas a cada una de las entradas tomadas separadamente (veremos que esto es lo que expresa el teorema de superposición).

Desde el punto de vista matemático, la relación V-A de un elemento es lineal si y solo si es homogénea y aditiva.

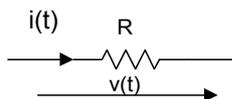
- Homogénea: si a la corriente $i(t)$ le corresponde una tensión $v(t)$, entonces a la corriente $\alpha \cdot i(t)$ le corresponde una tensión $\alpha \cdot v(t)$, donde α es una constante finita arbitraria.

$$i(t) \rightarrow v(t) \Rightarrow \alpha i(t) \rightarrow \alpha v(t)$$

- Aditiva: si a la corriente $i_1(t)$ le corresponde la tensión $v_1(t)$, y a la corriente $i_2(t)$ la tensión $v_2(t)$, entonces a la corriente $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$ le corresponde la tensión $v(t) = v_1(t) + v_2(t)$.

$$i_1(t) \rightarrow v_1(t) \wedge i_2(t) \rightarrow v_2(t) \Rightarrow i_1(t) + i_2(t) \rightarrow v_1(t) + v_2(t)$$

Analicemos el caso de una resistencia de valor R , donde $v(t)$ es la tensión en sus bornes e $i(t)$ la corriente que la recorre.



Como la relación V-A es: $v(t) = R i(t)$, decimos que para una $i(t)$ dada le corresponde una $v(t)$, o que la tensión $v(t)$ es una función de la corriente $i(t)$. Luego,

Cuando la entrada es una corriente: $i_1(t) \rightarrow v_1(t) = R \cdot i_1(t)$

Cuando la entrada es una corriente: $\alpha \cdot i_1(t) \rightarrow v_\alpha(t) = R \cdot (\alpha \cdot i_1(t)) = \alpha \cdot (R \cdot i_1(t)) = \alpha \cdot v_1(t)$

Cuando la entrada es: $i_\Sigma(t) = i_1(t) + i_2(t) \rightarrow v_\Sigma(t) = R \cdot (i_1(t) + i_2(t)) = R \cdot i_1(t) + R \cdot i_2(t) = v_1(t) + v_2(t)$

Ejemplo: Si $v(t) = i^2(t)$ decimos que es no lineal porque es no homogénea y no aditiva.

Cuando la entrada es una corriente: $i_1(t) \rightarrow v_1(t) = i_1^2(t)$

Cuando la entrada es una corriente: $i_2(t) \rightarrow v_2(t) = i_2^2(t)$

Cuando la entrada es: $\alpha \cdot i_1(t) \rightarrow v_\alpha(t) = (\alpha \cdot i_1(t))^2 = \alpha^2 \cdot (i_1(t))^2 \neq \alpha \cdot v_1(t) \Rightarrow$ es **no homogénea**

Cuando la entrada es: $i_\Sigma(t) = i_1(t) + i_2(t) \rightarrow v_\Sigma(t) = (i_1(t) + i_2(t))^2 = i_1^2(t) + i_2^2(t) + 2 \cdot i_1(t) \cdot i_2(t) \neq v_1^2(t) + v_2^2(t) \Rightarrow$ es **no aditiva**.

b) Invariancia en el tiempo.

Este concepto implica que un retraso en la entrada produce el mismo retraso en la salida. Hasta ahora hemos supuesto que la resistencia y los parámetros de control de las fuentes controladas no varían en el tiempo. Demostraremos que un retraso temporal en la entrada conlleva a un retraso en la salida en el mismo valor. Por ejemplo, para una resistencia:

$$v(t) = R \cdot i(t) \quad (1)$$

Veamos ahora que pasa si utilizamos una entrada igual a la original pero retrasada un retardo t_0 .

$$i_2(t) = i(t - t_0)$$

La respuesta a esta nueva entrada será:

$$v_2(t) = R \cdot i_2(t) = R \cdot i(t - t_0)$$

Comparando la última igualdad con la ecuación (1) evaluada en $t - t_0$:

$$v_2(t) = R \cdot i(t - t_0) = v(t - t_0)$$

Vemos así que la salida está también retrasada un tiempo t_0 , tal como esperábamos.

Formalmente desde el punto de vista matemático, una transformación es invariante en el tiempo si y solo si, para cada entrada $x(t)$ con respuesta $y(t) = T[x(t)]$ se cumple que:

$$y(t - t_0) = T[x(t - t_0)]$$

para todo t_0 , donde $-\infty < t_0 < \infty$

Por lo tanto, diremos que un elemento de circuito es **invariante en el tiempo** si y solo si la entrada y la salida están vinculadas por una transformación invariante en el tiempo.

4.2 Teorema de Superposición

El principio o teorema de superposición es una consecuencia fundamental de la linealidad, y juega un importante papel en el análisis de los circuitos eléctricos, ya que permite obtener la respuesta a la acción de varias fuentes actuando en conjunto como la suma de las respuestas individuales del circuito a cada una de ellas.

4.2.1 Problema introductorio al teorema

En el circuito de la Fig. 1, se desea hallar el valor de la corriente I_{r1} . El método a aplicar será el de mallas, y la corriente incógnita coincidirá con la corriente de malla I_1 .

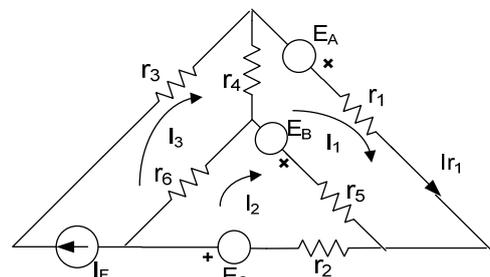


Fig. 1

El sistema de ecuaciones de mallas correspondiente será:

$$\begin{cases} I_1(r_1 + r_5 + r_4) - I_2 r_5 - I_3 r_4 = E_A - E_B \\ -I_1 r_5 + I_2(r_2 + r_5 + r_6) - I_3 r_6 = E_B + E_C \\ I_3 = I_f \end{cases}$$

Reemplazando I_3 por I_f , tendremos:

$$\begin{cases} I_1 \cdot (r_1 + r_4 + r_5) - I_2 \cdot r_5 = E_A - E_B + I_f \cdot r_4 \\ -I_1 \cdot r_5 + I_2 \cdot (r_2 + r_5 + r_6) = E_B + E_C + I_f \cdot r_6 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema por método de Cramer para la corriente I_1 obtendremos:

$$I_1 = \frac{(E_A - E_B + I_f \cdot r_4) \cdot (r_2 + r_5 + r_6) + (E_B - E_C + I_f \cdot r_6) \cdot r_5}{(r_1 + r_4 + r_5) \cdot (r_2 + r_5 + r_6) - r_5^2} = \frac{(E_A - E_B + I_f \cdot r_4) \cdot a_{22} + (E_B - E_C + I_f \cdot r_6) \cdot a_{12}}{\Delta}$$

donde a_{ij} son los elementos de la matriz pasiva o matriz resistencia del circuito A (matriz de coeficientes de las ecuaciones del método de mallas), y Δ es el determinante de dicha matriz.

Reordenando, tendremos:

$$I_1 = E_A \frac{a_{22}}{\Delta} + E_B \frac{a_{12} - a_{22}}{\Delta} + E_C \frac{a_{12}}{\Delta} + I_f \frac{r_4 \cdot a_{22} - r_6 \cdot a_{12}}{\Delta}$$

La expresión anterior es una sumatoria de corrientes, donde cada sumando es el producto entre el valor de las fuentes independientes del circuito (E_A , E_B , E_C e I_f) y una constante que depende solamente de la matriz pasiva (determinada por los valores de las resistencias, las fuentes controladas y la topología de la red).

Entonces concluimos que la corriente de rama incógnita I_{r1} (coincidente con la corriente de malla I_1) puede obtenerse como **la suma algebraica de las corrientes producidas en la rama por cada una de las fuentes independientes del circuito actuando por separado.**

Enunciado del teorema:

Sea N un circuito lineal invariante en el tiempo, con solución única, alimentado por α fuentes de tensión *independientes* $v_{s1}(t), v_{s2}(t), \dots, v_{s\alpha}(t)$, y β fuentes de corriente *independientes* $i_{s1}(t), \dots, i_{s\beta}(t)$.

En estas condiciones, cualquier potencial de nudo $e_j(t)$, cualquier tensión de rama $v_j(t)$, o cualquier corriente de rama $i_j(t)$ está dada por una expresión de la forma:

$$y(t) = H_1 v_{s1}(t) + \dots + H_\alpha v_{s\alpha}(t) + K_1 i_{s1}(t) + \dots + K_\beta i_{s\beta}(t) \quad (*)$$

donde los coeficientes H_k (con $k = 1, 2, \dots, \alpha$) y K_k (con $k = 1, 2, \dots, \beta$), son *constantes* que dependen sólo de los parámetros del circuito N , y de la elección de la variable de salida, pero *no* de las fuentes independientes.

Nota: Mas adelante veremos que estas constantes son formalmente iguales a la función transferencia que el circuito presenta cuando se relaciona la variable incógnita con la excitación provista por cada fuente.

Demostración:

La prueba de este teorema surge fácilmente de la resolución de un determinante desarrollándolo por una columna. En efecto, cada fuente independiente es un elemento del vector término independiente, y cuando se aplica Cramer para resolver para una variable, este vector pasa a ser una columna del determinante del numerador. Al desarrollar el numerador por esa columna, el resultado es una suma de términos, cada uno de los cuales tiene una fuente independiente como factor multiplicativo, pudiendo interpretarse cada término como la respuesta de la red cuando esta fuente está **activa** y las otras **pasivadas**:

$$[R_{hj}] [I_h] = [E_{hh}] \quad R_{hj} = \begin{bmatrix} R_{11} & \dots & R_{1\ell} \\ R_{21} & \dots & R_{2\ell} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ R_{\ell 1} & \dots & R_{\ell\ell} \end{bmatrix} \quad I_h = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_\ell \end{bmatrix} \quad E_{hh} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \dots \\ E_\ell \end{bmatrix}$$

donde: R_{hh} : resistencia propia de la malla h

$R_{hj} = R_{jh}$: resistencia común o mutua entre la malla h y la malla j

E_{hh} : f.e.m. neta de la malla h .

Resolviendo este sistema por determinantes para cualquiera de las intensidades I_h , obtendremos:

$$I_k = \frac{\det \begin{bmatrix} R_{11} & \dots & E_1 & \dots & R_{1\ell} \\ R_{21} & \dots & E_2 & \dots & R_{2\ell} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ R_{\ell 1} & \dots & E_\lambda & \dots & R_{\ell\ell} \end{bmatrix}}{\Delta} = \frac{E_1 \cdot \Delta_{1h} + E_2 \cdot \Delta_{2h} + \dots + E_\lambda \cdot \Delta_{\lambda h}}{\Delta} = E_1 \frac{\Delta_{1h}}{\Delta} + E_2 \frac{\Delta_{2h}}{\Delta} + \dots + E_\lambda \frac{\Delta_{\lambda h}}{\Delta} (**)$$

donde:

- Δ es determinante de la matriz R
- Δ_{jh} es el adjunto del elemento de la i -ésima fila y la j -ésima columna.

Analizando la forma general del teorema de superposición dada por (*) y comparándola con (**), es interesante realizar algunas interpretaciones de la misma desde el punto de vista circuital:

1. Cada término $H_k v_{sk}(t)$ en la expresión general (*) es igual a la componente de la respuesta $y(t)$ cuando *todas las fuentes de tensión independientes en N excepto $v_{sk}(t)$ se pasivan*.
2. Cada término $K_k i_{sk}(t)$ en la expresión general (*) es igual a la componente de la respuesta $y(t)$ cuando *todas las fuentes de corriente independientes en N excepto $i_{sk}(t)$ se pasivan*.
3. La expresión general (*) nos muestra que:

"la respuesta debida a la acción de varias fuentes independientes de tensión y de corriente es igual a la suma de las respuestas debidas a cada fuente independiente *actuando sola*, es decir, con todas las restantes fuentes **pasivadas** (fuentes de tensión *independientes* reemplazadas por cortocircuitos, y fuentes de corriente *independientes* reemplazadas por circuitos abiertos)". Para aplicar superposición, **las fuentes dependientes se dejan tal como están**, es decir, **no se pasivan**.

Una representación gráfica de la aplicación del teorema de superposición para calcular la tensión \mathbf{V} y la corriente \mathbf{I} en un circuito con tres fuentes independientes se muestra en la Figura 2.

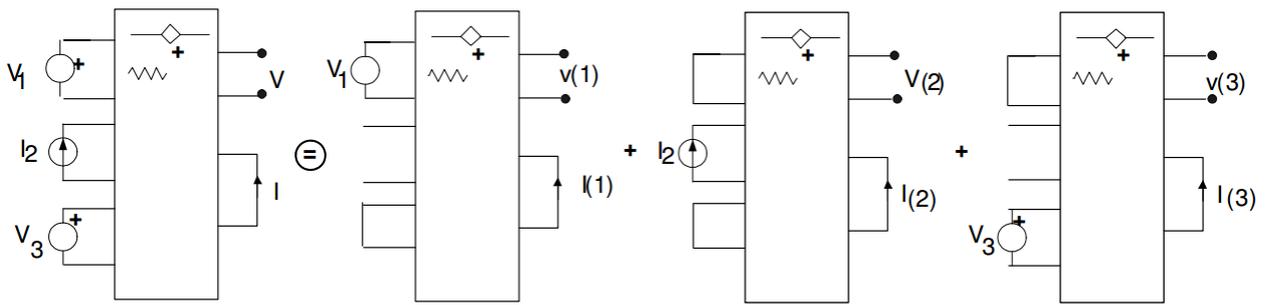


Fig. 2: Aplicación práctica del Principio de Superposición

Resultando entonces que:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(1) + \mathbf{V}(2) + \mathbf{V}(3) \quad \mathbf{I} = \mathbf{I}(1) + \mathbf{I}(2) + \mathbf{I}(3)$$

Dado que este principio se desprende de las propiedades generales de las ecuaciones lineales, se lo puede aplicar para determinar no sólo las corrientes de malla o de rama en función de las f.e.m.s y parámetros pasivos dados, sino también los potenciales de nudos.

En cambio, el principio de superposición no se puede aplicar para calcular potencias, dado que la potencia es una función cuadrática de las intensidades, tensiones o f.e.m.s., constituyendo por lo tanto una función no lineal.

Veremos ahora un ejemplo de aplicación para el caso en que en el circuito haya fuentes controladas:

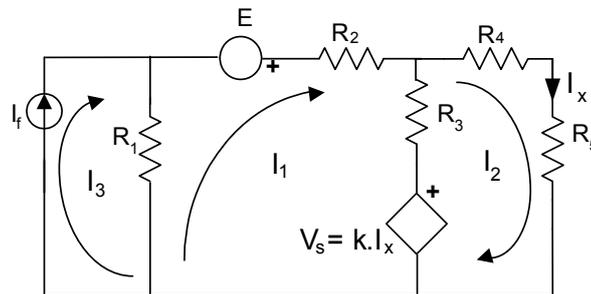


Fig. 3

Elegimos para su resolución el método de mallas, obteniendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} I_1(R_1 + R_2 + R_3) - I_2 \cdot R_3 - I_3 \cdot R_1 = E - V_x \\ -I_1 \cdot R_3 + I_2(R_3 + R_4 + R_5) - I_3 \cdot 0 = V_x \\ I_3 = I_f \\ V_s = k \cdot I_x \quad (\text{ecuación fte. cont.}) \end{cases}$$

Vemos que en este sistema hay dos tipos de ecuaciones: las ecuaciones de malla (que especifican condiciones de equilibrio si todas las fuentes se suponen independientes) y una ecuación que expresa la magnitud de control para la fuente controlada.

El valor de la fuente controlada de tensión es proporcional a una corriente, pudiendo expresarse como combinación lineal de un conjunto de corrientes de malla (o bucle) o potenciales de nudo. Haciendo las sustituciones correspondientes y reordenando, tenemos que el sistema se reduce a:

$$\begin{cases} I_1(R_1 + R_2 + R_3) - I_2 \cdot R_3 - I_f \cdot R_1 = E - k \cdot I_2 \\ -I_1 \cdot R_3 + I_2(R_3 + R_4 + R_5) = k \cdot I_2 \end{cases}$$

y finalmente:

$$\begin{cases} I_1(R_1 + R_2 + R_3) - I_2(R_3 - k) = E + I_f \cdot R_1 \\ -I_1 \cdot R_3 + I_2(R_3 + R_4 + R_5 - k) = 0 \end{cases}$$

donde podemos observar que el primer miembro de las ecuaciones ha perdido la simetría propia de un sistema de ecuaciones de mallas sin fuentes controladas.

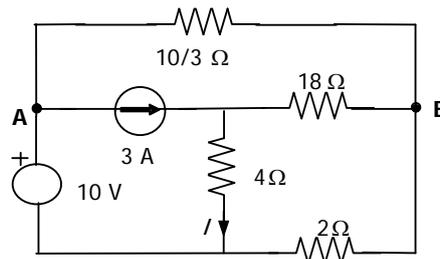
Resolviendo para la corriente I_1 tendremos:

$$I_1 = E \frac{R_3 + R_4 + R_5 - K}{\Delta} + I_f \frac{R_1(R_3 + R_4 + R_5 - K)}{\Delta}$$

Dado que las ecuaciones de equilibrio (mallas, nudos o bucles) de una red con fuentes controladas pueden siempre expresarse como un conjunto de ecuaciones lineales a coeficientes constantes, **es posible aplicar el teorema de superposición con la única precaución de no pasivar las fuentes controladas**. Esto se debe a que pasivar una fuente controlada significa anular su magnitud de control, es decir, abrir o cortocircuitar una rama, modificando de esta forma la topología de la red y alterando la matriz pasiva del sistema.

Ejercicios:

Calcular U_{AB} e I mediante el teorema de superposición.



Rta: $U_{AB} = 5,8 \text{ V}$; $I = 2,64 \text{ A}$

4.3 Teorema de Millman

El teorema de Millman constituye una herramienta útil para reducir los circuitos, dado que permite reemplazar varias fuentes de distinto tipo conectadas en paralelo por un dipolo activo con una sola fuente, resultando así ser una generalización del concepto de transformación de fuentes. Lo vemos a partir de un ejemplo:

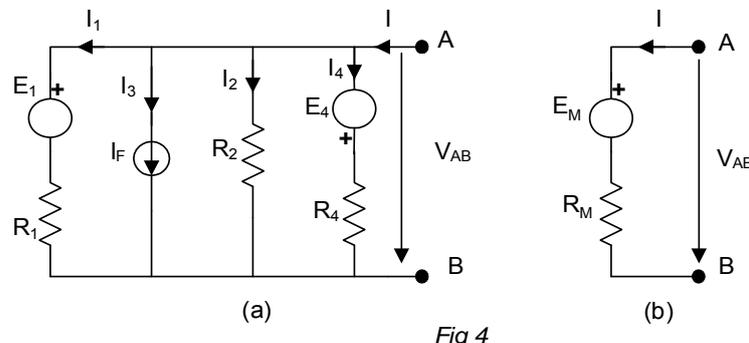


Fig 4

La aplicación de la LKC en el nudo **A** (Fig. 4(a)) nos dice:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

La red (a) será equivalente a la (b) si, para cualquier valor de I entregado por el resto del circuito, se cumple que:

$$V_{AB(a)} = V_{AB(b)}$$

Por ley de Ohm, calculamos la corriente en cada rama a partir de la d.d.p. en cada resistencia:

$$I_1 = \frac{V_{AB} - E_1}{R_1} = V_{AB} G_1 - E_1 G_1$$

$$I_2 = \frac{V_{AB}}{R_2} = V_{AB} G_2$$

$$I_3 = I_F$$

$$I_4 = \frac{V_{AB} + E_4}{R_4} = V_{AB} G_4 + E_4 G_4$$

Reemplazando en la expresión de la LKC en el nudo A se tiene:

$$I = V_{AB} (G_1 + G_2 + G_4) - (E_1 G_1 - E_4 G_4) + I_F$$

Para la red de la Fig. 4(b), la ley de Ohm nos conduce a:

$$I = \frac{V_{AB} - E_M}{R_M} = V_{AB} G_M - E_M G_M$$

Comparando ambas expresiones y generalizando, vemos que, para tener la misma corriente I en ambos dipolos, se debe cumplir que:

$$G_M = \sum_{k=1}^n G_k$$

$$E_M G_M = \sum_{s=1}^m E_s G_s + \sum_{j=1}^p I_j \Rightarrow E_M = \frac{\sum_{s=1}^m E_s G_s + \sum_{j=1}^p I_j}{\sum_{k=1}^n G_k}$$

Analizando la última expresión podemos concluir que:

- El numerador es la suma algebraica de las corrientes de cortocircuito de las ramas activas.
- El denominador es la conductancia total de la red, en la cual intervienen todas las ramas, independientemente de si tienen o no fuentes de tensión.
- Si no hay f.e.m. en la rama, el término respectivo desaparece del numerador de la ecuación, permaneciendo su conductancia en el denominador.

Al calcular la f.e.m. equivalente, se afectan con signo (+) aquellas f.e.m.s E_j que se dirigen al nudo A, y con signo (-) las que se dirigen al B, siendo asimismo positivas aquellas fuentes de corriente que aportan corriente al nudo A.

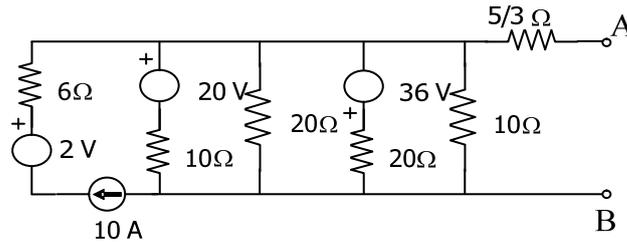
Para demostrar por completo la validez del esquema equivalente E_M , R_M , falta considerar la equivalencia externa e interna de los dipolos (a) y (b), cosa que haremos comparando el régimen energético de ambos esquemas.

En todas las ramas de (a), para un caso general, las intensidades no son iguales a cero. De allí que la potencia total de las fuentes se invertiría en cubrir las pérdidas térmicas que se producen en las resistencias. En el esquema (b), en cambio, no hay pérdidas en la resistencia equivalente. Por consiguiente, a pesar de la invariabilidad de las corrientes y tensiones en la parte del circuito no

afectadas por la transformación (equivalencia externa), la potencia desarrollada por las fuentes antes de la transformación **no** es igual a la potencia desarrollada en ellas luego de la misma. Esto no impide, sin embargo, que el teorema de Millman se utilice ampliamente, puesto que una vez determinada la corriente de salida se puede volver al esquema original y hallar las intensidades reales y la potencia en todas sus ramas. Concluimos, por lo tanto, que el equivalente de Millman es un equivalente externo del circuito original.

Ejercicio:

Hallar el dipolo equivalente entre los bornes A-B



4.4 Teorema de Sustitución

Dada una red arbitraria, no necesariamente lineal, para la cual se conocen y son únicas todas las tensiones y corrientes, y en la cual la k -ésima rama tiene asociadas una tensión $v_k(t)$ y una corriente $i_k(t)$, se demuestra que dicha rama puede reemplazarse por cualquiera de los siguientes equivalentes, sin alterar el comportamiento de la red:

- Una fuente de tensión independiente de valor $v_k(t)$;
- Una fuente de corriente independiente de valor $i_k(t)$,
- En régimen de C.C., por una resistencia de valor $R = \frac{V_k}{I_k}$, o una conductancia de valor $G = \frac{I_k}{V_k}$

Demostración:

Sean $v_1(t), v_2(t), \dots, v_b(t), i_1(t), i_2(t), \dots, i_b(t)$ las tensiones y corrientes de rama, respectivamente de una red dada con b ramas, las cuales son únicas y satisfacen las ecuaciones de la LKT, LKC y las relaciones V-A de las ramas. Consideremos ahora el caso en el cual la k -ésima rama es reemplazada por una fuente de tensión de valor $v_k(t)$. Dado que la estructura, o topología, de la red es exactamente la misma de la red original, las ecuaciones de la LKC y LKT son las mismas, y las ecuaciones de rama, salvo para la rama k son iguales para la red modificada que para la red dada. Como se **impuso** para la k -ésima rama que su tensión fuera $v_k(t)$, su corriente puede ser cualquiera. Entonces, las tensiones y corrientes únicas de la red original satisfacen todas las condiciones impuestas a la red modificada, con lo cual la solución de esta última es única.

Ejemplo:

Analizaremos el reemplazo de un elemento pasivo cuyo punto de trabajo se conoce por una fuente ideal de tensión o una fuente ideal de corriente. Tal como se observa en la Figura 5, la d.d.p. V_{ab} es 6 V, y la corriente por la rama es $I = 3$ A. Por lo tanto, de acuerdo al teorema de sustitución, la resistencia de 2Ω puede reemplazarse por una fuente de 6 V (con lo cual se mantiene invariante la corriente I_{ab}), o por una fuente de corriente de 3 A (con lo cual se mantiene invariante la d.d.p. V_{ab}), sin que se vea afectado el resto de la red dado que las leyes de Kirchhoff no se han modificado. Asimismo, son posibles cualquiera de las sustituciones más complejas (fuente de corriente en serie con resistencia) mostradas en la Figura 5(c).

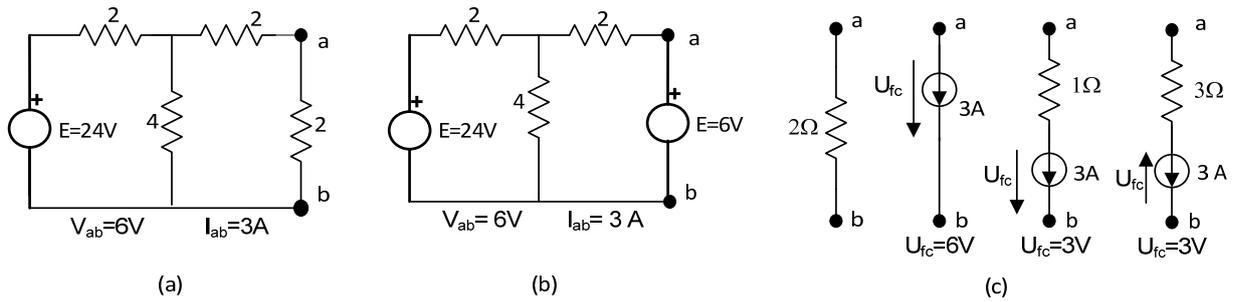


Fig. 5: Ejemplo de aplicación del Teorema de Sustitución

A continuación vemos que ocurriría cuando en una red genérica N tenemos un dipolo anómalo K que se conecta a través de sus terminales a y b. Dicho dipolo tiene asociada: una corriente $I_k(t)$ y una tensión $v_k(t)$, ambas conocidas para todo instante t, tal como se muestra en la Fig. 6(a).

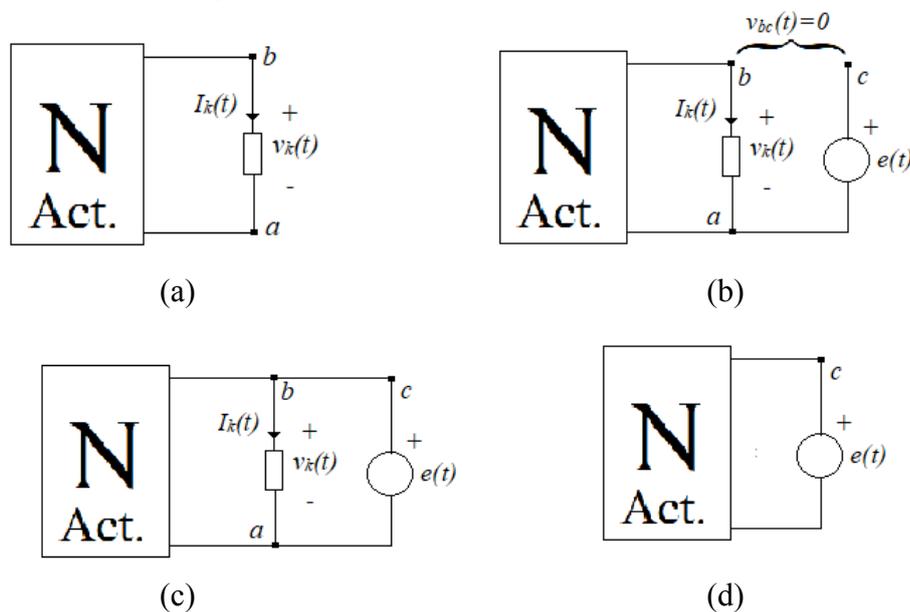


Fig. 6: Teorema de Sustitución con dipolo anómalo - Caso Fuente de tensión

Sea ahora una fuente de tensión $e(t)$, cuya evolución temporal coincide con $v_k(t)$. Conectando el terminal a del dipolo con el terminal negativo de la fuente de tensión (Fig. 6(b)) se puede ver que:

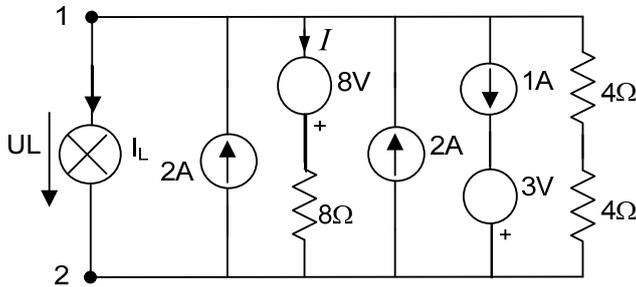
- No habrá circulación de corriente por la fuente de tensión ($i_{ca}(t) = 0A$).
- La diferencia de tensión entre el terminal b del dipolo y el terminal positivo de la fuente de tensión es 0 V (cortocircuito).

A partir de estas observaciones, podemos concluir que si se cortocircuitan los terminales b y c (cortocircuito físico o real), no habrá derivación de corriente por la fuente de tensión y, por ende, las tensiones y corrientes del dipolo K y de la red arbitraria N no se verán alteradas por la presencia de la fuente de tensión conectada en paralelo.

Finalmente, el dipolo K se convierte en un elemento redundante pues se encuentra conectado en paralelo a una fuente de tensión que funciona como carga, por lo que el equivalente externo del paralelo dipolo-fuente será directamente la fuente de tensión (Fig. 6(d)). Queda entonces demostrado que es válido sustituir un dipolo cualquiera K conectado a una red arbitraria N por una fuente de tensión cuya evolución coincida con la tensión del dipolo sin alterar las demás variables de circuito (tensiones y corrientes).

Ejercicio:

Hallar la corriente I .



$$U_L = 2I_L^2 + 10 I_L \text{ para } I_L > 0$$

Sugerencia: Hallar previamente el equivalente entre los terminales 1-2 aplicando Millman.

4.5 Teorema de Alteración

A veces es necesario saber, cuando una rama de una red se modifica total o parcialmente, qué efecto tendrá ese cambio en la corriente o la tensión en otras ramas de la red. Por ejemplo, ¿cuál será el efecto de colocar un amperímetro en una rama de una red, siendo su resistencia pequeña pero no despreciable? La posibilidad de analizar esta situación nos la provee el teorema de alteración, el cual por razones de simplicidad, demostraremos para una red resistiva pura.

4.5.1 Caso general

Enunciado del teorema:

Si la corriente en una rama de una red es I y la resistencia de esa rama se altera en un valor ΔR , las variaciones de tensión y corriente en cada rama de la red original se calculan pasivando la red y colocando en la rama alterada (es decir, de resistencia $R \pm \Delta R$) una fuente de f.e.m. de valor $I \cdot \Delta R$, y polaridad acorde a la modificación producida.

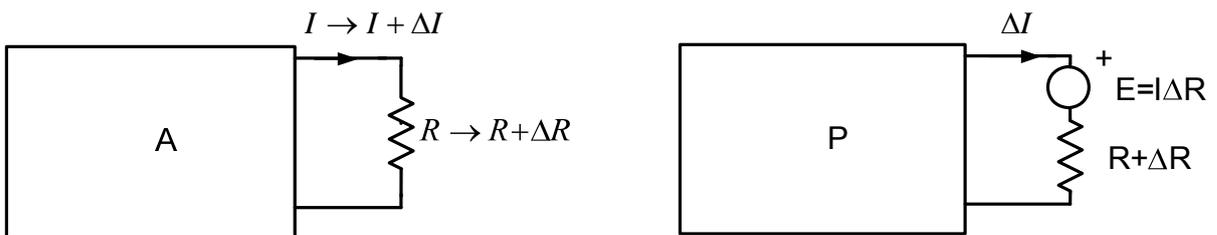


Fig. 7: Teorema de Alteración – Caso general

Demostración:

La Fig. 8(a) muestra una red lineal, en la cual se ha identificado una rama de resistencia R por la cual circula una corriente I . En la Fig. 8(b) se ha modificado esa resistencia, incrementándola en un valor ΔR , por lo que la corriente por la rama alterada pasa a tener un valor $I + \Delta I$.

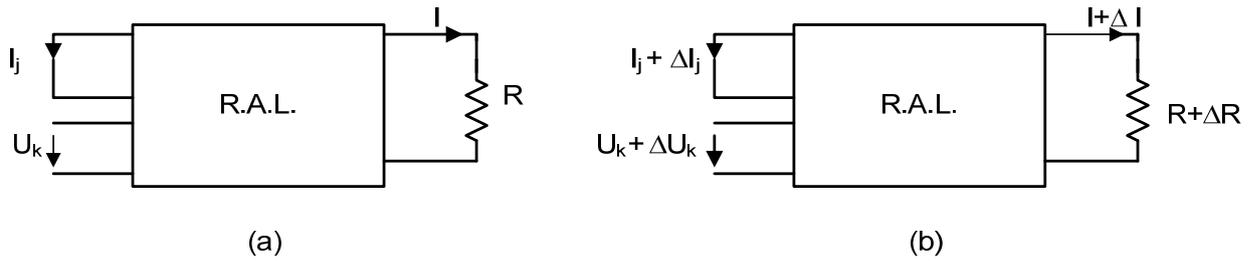


Fig. 8

Si ahora colocamos en la rama alterada una fuente de tensión de valor variable, podemos ajustar su valor de manera de lograr que por la rama circule la misma corriente I original (Fig. 9(a)). Bajo esta condición, la fuente de tensión compensa exactamente la caída de tensión en ΔR , por lo que su valor debe ser:

$$\Delta E = I \Delta R$$

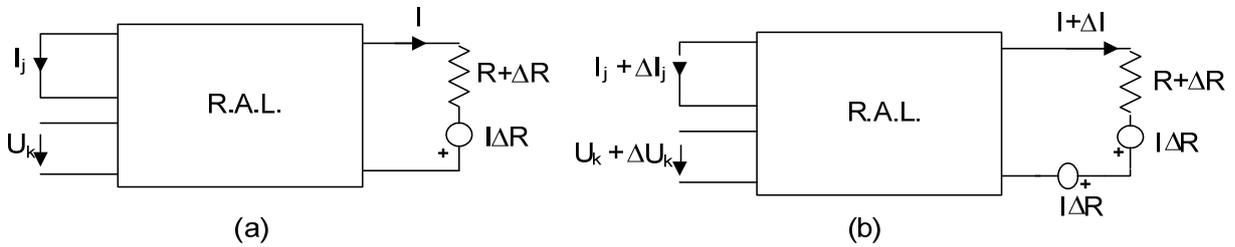


Fig. 9

El circuito de la Figura 9(a) es, por lo tanto, equivalente al de la Fig. 8(a). Ahora, según se indica en la Fig. 9(b), agregando otra fuente de igual valor de f.e.m. pero de sentido contrario al de la fuente anterior, la f.e.m. neta de la rama será 0 y la corriente tendrá un valor $I' = I + \Delta I$, siendo este circuito equivalente al de la Figura 8(b).

Aplicando el Teorema de Superposición sobre este último circuito (Fig. 9(b)), tendremos:

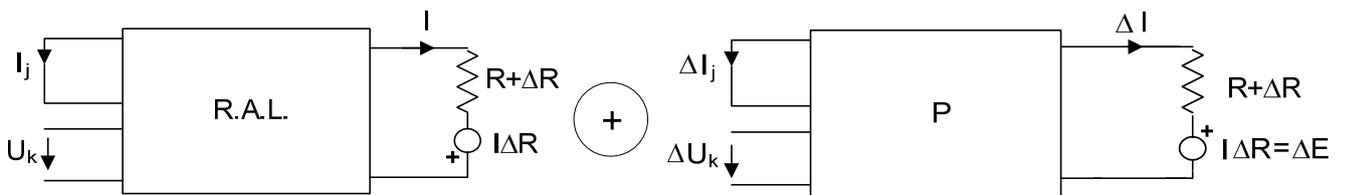


Fig. 10

En el circuito de la derecha de la Fig. 10, vemos que ΔI es la corriente producida por la fuente de valor ΔE actuando sola, y reemplazando el dipolo P por su resistencia equivalente R_{dip} . Podemos escribir:

$$\Delta I = - \Delta E / R^*$$

$$\text{donde: } R^* = R + \Delta R + R_{dip}.$$

El signo (-) de la variación de corriente nos indica que, a un incremento de resistencia corresponde un decremento de corriente y viceversa (lo cual era previsible). Este circuito nos muestra también que las modificaciones que se producen en las corrientes y tensiones de las distintas ramas de la red, son originadas por la fuente ΔE , pudiendo calcularse directamente a partir del circuito de la Fig. 11.

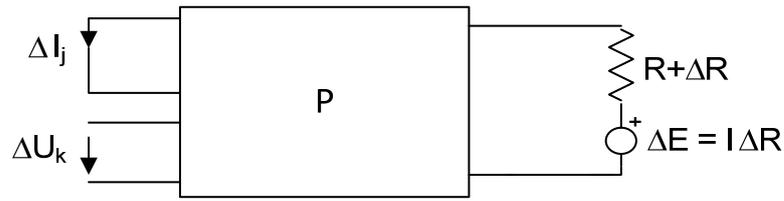
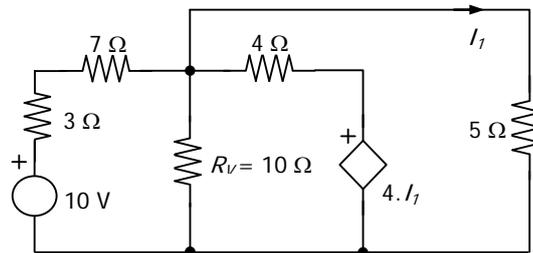


Fig. 11: Aplicación práctica del Teorema de Alteración

Ejercicio:

Dado el siguiente circuito, obtener la variación que se produce en la corriente I_1 cuando la resistencia R_V varía con un $\Delta R_V = -3 \Omega$.



Rta: $\Delta I_1 = -38,6 \text{ mA}$.

4.5.2 Casos especiales

a) Inserción de rama.

En una red lineal se inserta una rama, y se quieren determinar las variaciones producidas por la inserción. A los efectos de visualizar qué ocurre en distintos puntos del circuito, se explicitará una rama, recorrida por una corriente I_j , y un par de nudos, a los cuales corresponde la diferencia de potencial U_k .

En la Figura 12(a) se muestra la red y la carga que se insertara entre los bornes b-c. La Figura 12(b) es equivalente a la 12(a).

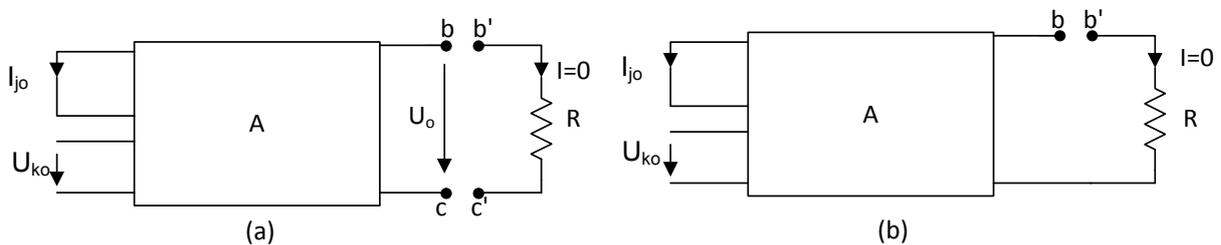


Fig. 12

Entre b y b' existe una d.d.p. U_o . Aplicando el teorema de sustitución, podemos reemplazar esa tensión de vacío por una fuente de tensión ideal de valor igual a la misma, sin que se altere el circuito (Fig. 13(a)).

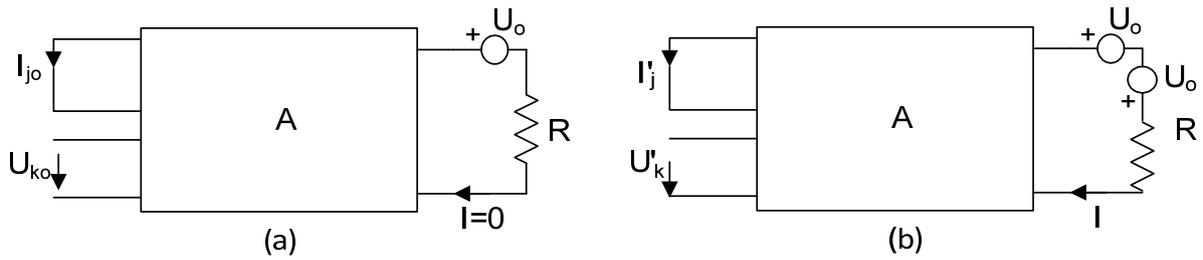


Fig. 13

Si ahora conectamos en la rama otra fuente ideal de tensión de valor U_0 pero de sentido contrario, por la rama de resistencia R circulara una corriente de valor I (Fig. 13(b)). Por el Teorema de Superposición, este último circuito lo podemos resolver de la siguiente forma:

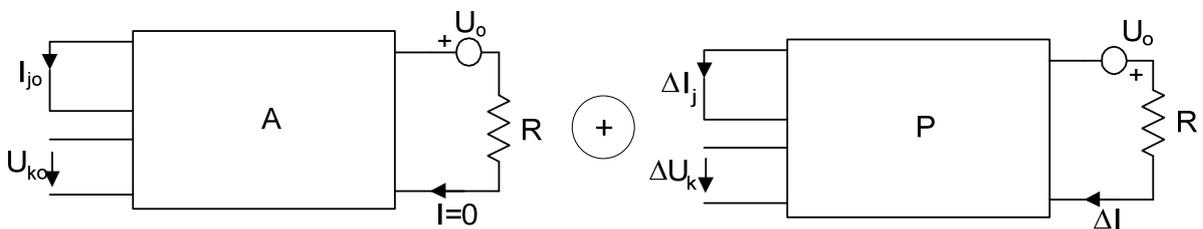


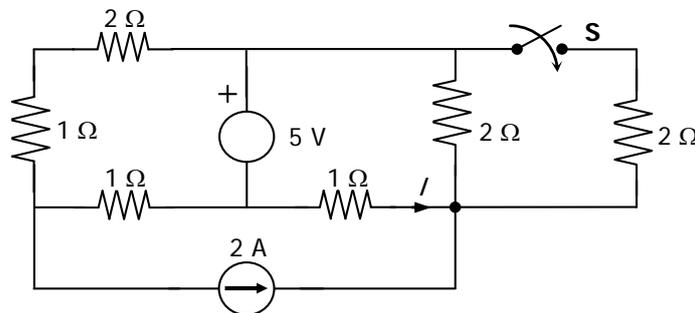
Fig. 14

Con el circuito de la derecha de la Figura 14 obtendremos las variaciones en las corrientes y tensiones de todas las ramas. En conclusión:

"Al insertar una rama en una red lineal, todas las modificaciones de los parámetros determinantes se pueden calcular incluyendo en la red pasivada una única fuente de f.e.m. ubicada en la rama insertada de valor numéricamente igual al opuesto de la d.d.p. original entre los nudos en que se inserta la rama".

Ejercicio:

Calcular la variación que se produce en la corriente I cuando se cierra el interruptor S .



Rta: $\Delta I = -0,5\text{ A}$

b) Extracción o apertura de rama.

Veremos ahora qué ocurre cuando extraemos (o abrimos) la rama R. Para esto supondremos que la resistencia de la R se altera un valor ΔR muy grande y aplicaremos entonces el resultado del caso general del Teorema de Alteración (Fig. 15 derecha).

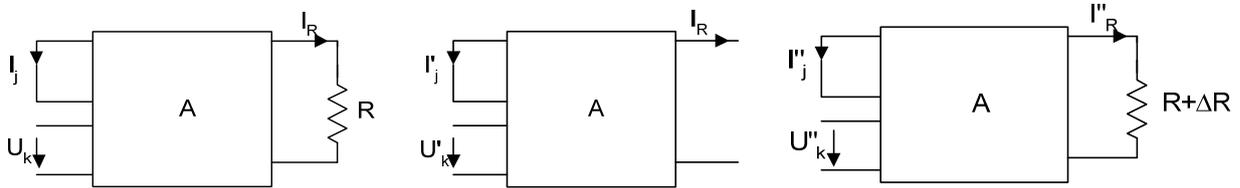


Fig. 15

Para calcular las variaciones se pasiva la red y se inserta una fuente $\Delta E = I_R \Delta R$. Así:

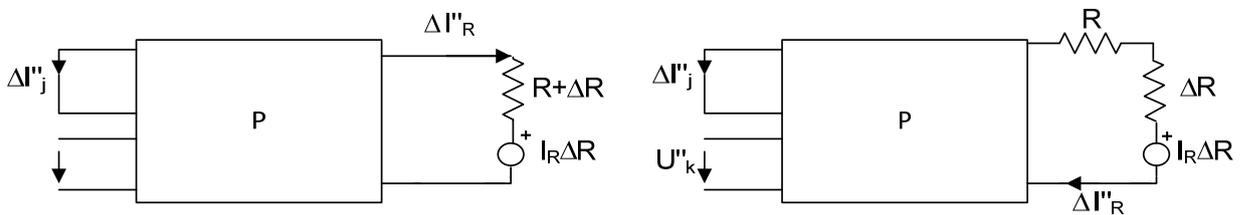


Fig. 16

Pero por transformación de fuente de tensión en fuente de corriente el circuito de la derecha de la Fig. 16 es equivalente al circuito de la Fig. 17.

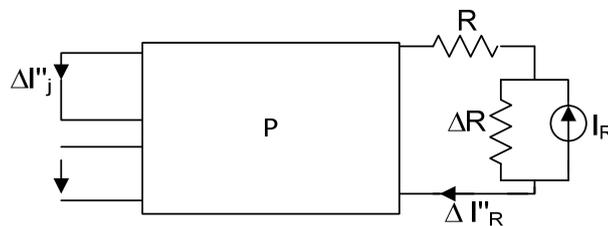


Fig. 17

Se ve fácilmente que al hacer el límite cuando $\Delta R \rightarrow \infty$, queda la fuente de corriente ideal en serie con R, o sea, llegamos al circuito siguiente:

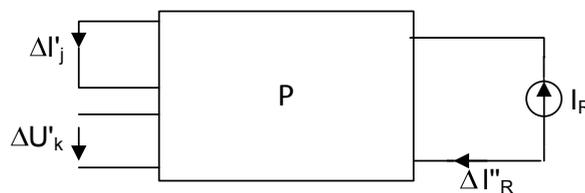


Fig. 18: Aplicación práctica del Teorema de Alteración – Caso Extracción rama

A partir del circuito de la Figura 18, podemos enunciar lo siguiente:

"Al extraer una rama de una red lineal todas las modificaciones de los parámetros determinantes (tensiones y corrientes) se pueden calcular insertando en la red pasivada una única fuente de corriente, ubicada en la rama extraída, de valor numéricamente igual al opuesto de la corriente original por dicha rama".

Ejercicios:

1) En el circuito de la Fig. 19(a), determinar la variación en la tensión V_{12} producida al abrir la llave S.

Rta: $\Delta V_{12} = 36 \text{ V}$

2) Aplicando el teorema de alteración, obtener ΔI y ΔP_{R1} cuando se abre la llave S en la Fig. 19(b).

Rta: a) $\Delta I = -0,1667 \text{ A}$; $\Delta P_{R1} = 2,889 \text{ W}$

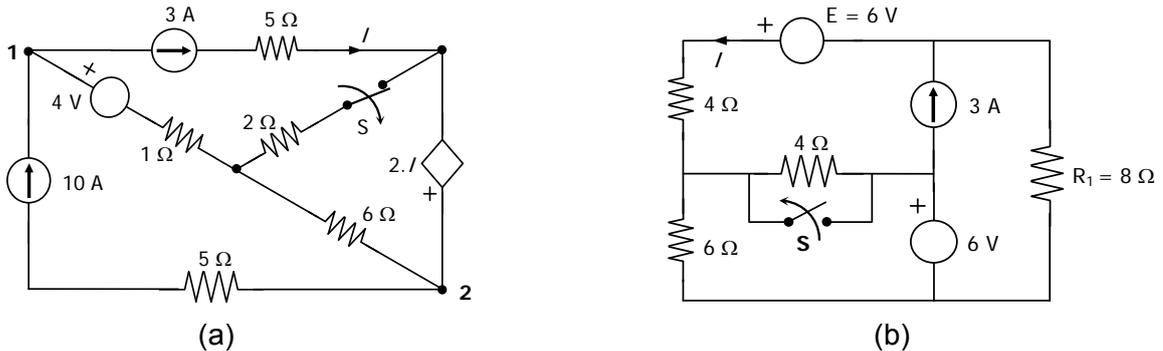


Fig. 19: Problemas de aplicación del Teorema de Alteración

4.6 Teoremas de Thévenin y Norton

4.6.1 Introducción.

En esta sección analizaremos la posibilidad de simplificar el proceso de resolución cuando lo que nos interesa es calcular el estado de régimen de una única rama de un circuito. Para ello, demostraremos que es posible reemplazar el efecto del resto del circuito sobre dicha rama por un dipolo "fuente de tensión real equivalente" o "fuente de corriente real equivalente", actuando en el punto apropiado. Estos resultados son los que se conocen como teoremas de Thévenin y de Norton, y son, básicamente, métodos de transformación de fuentes conducentes a reemplazar el efecto de varias fuentes distribuidas en forma arbitraria por una única fuente real que alimenta a la rama de interés.

4.6.2 Teorema de Thévenin.

Enunciado del teorema:

Dada una red activa **lineal**, una parte de la misma (subred A) puede reemplazarse, con respecto a otra parte (subred B), por un circuito equivalente consistente en una fuente de tensión de valor V_{th} igual a la tensión de circuito abierto (en vacío) de la subred A en serie con una resistencia R_{th} numéricamente igual a la resistencia de la subred A medida entre los terminales a y b en condiciones de vacío, y con todas las fuentes independientes pasivadas.

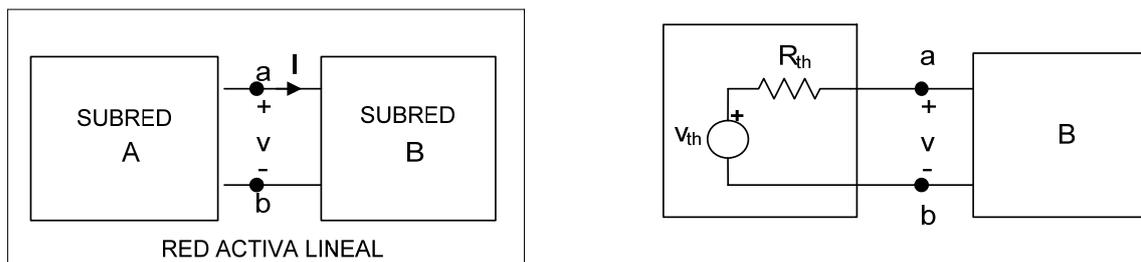


Fig. 20

Demostración:

Supondremos que la subred A es activa, y que la subred B es pasiva y está representada por un dipolo lineal R. Veremos si efectivamente es posible reemplazar el dipolo activo A por una fuente de f.e.m. de valor igual a la tensión de vacío del mismo en serie con la resistencia vista desde sus bornes y obtener el mismo punto de trabajo para R. Para ello abrimos la rama que conecta a los dipolos A y B, con lo que la corriente I toma valor cero. Entre los puntos 1 y 2 aparece una d.d.p. de valor U_o , igual a la tensión de vacío de la red activa A (Fig. 21(a)). Si ahora, recurriendo al teorema de sustitución, conectamos entre 1 y 2 una fuente de tensión de valor U_o , el estado de régimen de la rama no se modifica, es decir, I sigue siendo nula. Para que por la rama circule la corriente I, debemos introducir otra fuente de tensión que denominaremos E_{th} , de valor igual y sentido contrario a U_o , con lo que el circuito de la Figura 21(b) es equivalente al de partida

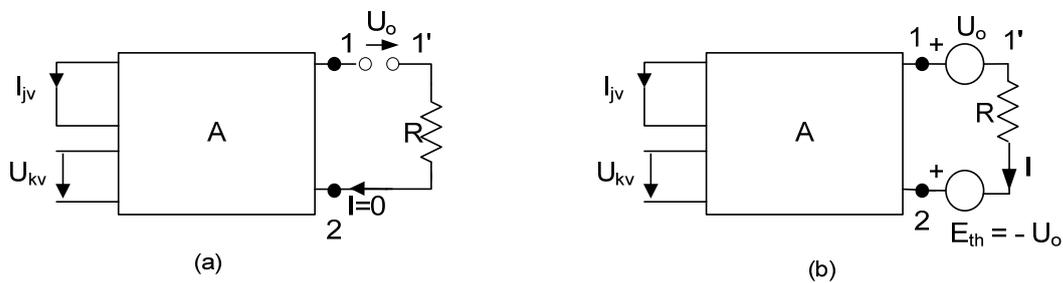


Fig. 21

De acuerdo al teorema de superposición, el cual podemos aplicar pues supusimos que la red de partida era lineal, se puede hallar la intensidad en la rama en estudio sumando algebraicamente las intensidades producidas por cada una de las fuentes (Fig. 22). Pero todas las fuentes que se encuentran en el interior del dipolo activo A, junto con la fuente de valor U_o crean en la rama una corriente de intensidad nula (Fig. 22(b)).

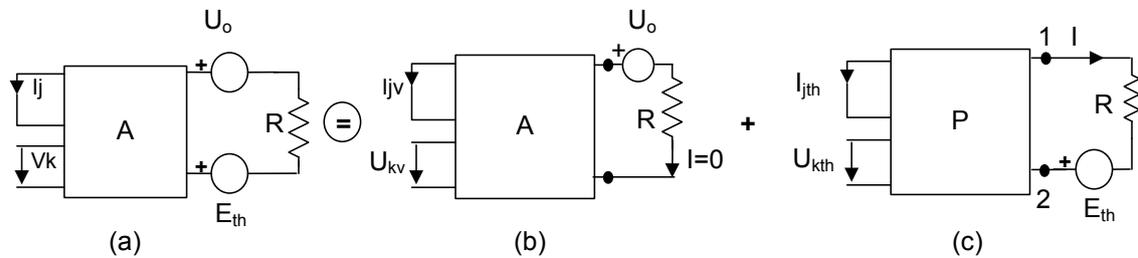


Fig. 22

Por lo tanto, la intensidad producida en la rama en estudio debida solamente a la acción de la fuente E_{th} será la intensidad real en esa rama (Fig. 22(c)), que se calcula mediante la siguiente expresión:

$$I = \frac{E_{th}}{R_{th} + R}$$

donde R_{th} es la resistencia de entrada del dipolo pasivo P entre 1 y 2, que se obtiene cortocircuitando todas la fuentes de tensión y dejando en circuito abierto todas las fuentes de corriente del dipolo A.

Hemos así demostrado que el dipolo A puede reemplazarse por el generador equivalente propuesto, denominado generador equivalente de Thevenin, en el cual la tensión de Thevenin (de vacío, o de circuito abierto) produce el mismo efecto de la distribución original de fuentes, pero solo en lo referente a esta rama en particular.

Comentario: La estructura de la red podría ser tal que cuando la corriente en una rama se hace cero abriéndola, se hagan cero simultáneamente otras corrientes de la red. En este caso, la fuente equivalente de Thevenin reemplaza el efecto de las f.e.m.s originales también para estas ramas. Dado que las ramas en estudio se eligen según sea necesario, el método puede realmente usarse para el cálculo de todas las corrientes, pero solo luego de aplicar Thévenin tantas veces como sea necesario.

4.6.3 Aplicaciones del teorema de Thevenin.

Dentro de las aplicaciones del teorema de Thevenin, podemos hacer referencia a dos tipos:

- *Aplicación fundamental:* determinación del estado de régimen de una rama del circuito en particular.
- *Aplicación ineludible:* existencia de un elemento no lineal en el circuito a resolver.

Entre las hipótesis que debía satisfacer un circuito para la aplicación del teorema de Thevenin estaba la de linealidad de sus componentes, de manera de poder aplicar el teorema de superposición. Podríamos suponer, entonces, que no podemos aplicarlo en un circuito con un dipolo anómalo. Veamos si tal suposición es cierta, analizando el siguiente esquema:

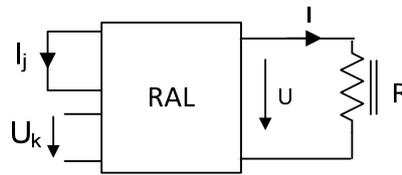


Fig. 23

Según vimos en la demostración del teorema de Thevenin, para calcular el estado de régimen de la rama que contiene al anómalo:

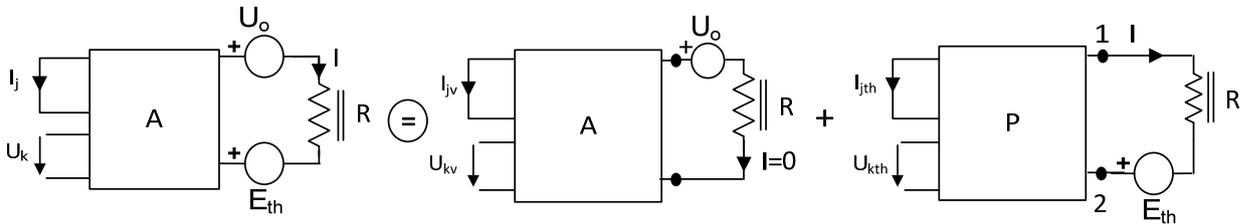


Fig. 24: Aplicación del Teorema de Thevenin con un dipolo anómalo

Vemos que en la rama anómala estamos superponiendo **dos estados**: uno de corriente cero, y otro correspondiente al valor real de la misma **por lo que no se contraviene el principio de superposición**. Así, en el circuito de la derecha de la Figura 24 podemos reemplazar la red pasiva entre 1 y 2 por la R_{th} y llegamos a la malla simple mostrada en la Fig. 25 donde es simple calcular el punto de trabajo del dipolo anómalo (por métodos gráficos o analíticos, tal como vimos en el Capítulo 2).

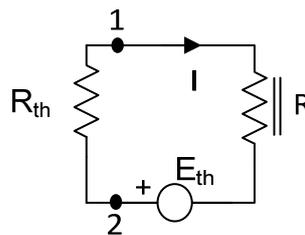


Fig. 25

Una vez hallado el punto de trabajo del anómalo, y a los efectos del calcular del estado de régimen

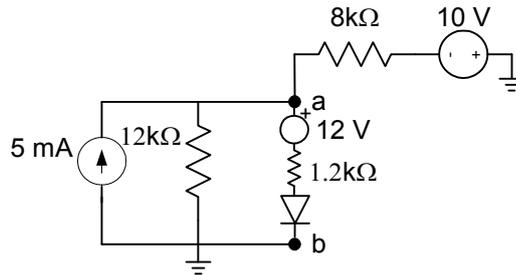
de toda la red, podemos recurrir al teorema de sustitución y reemplazarlo por:

- a) una resistencia lineal, igual a la resistencia estática del anómalo,
- b) una fuente de tensión, de valor igual a la d.d.p. entre sus bornes,
- c) una fuente de corriente, de valor igual a la corriente que lo recorre.

Ejercicio:

En el circuito de la figura, determinar:

- a) Si el diodo conduce
- b) Cuál es el valor de la diferencia de potencial entre a y b.



Rta: a) Conduce b) $U_{ab} = -39V$

4.7 Teorema de Norton

Enunciado del teorema:

El estado de régimen de un dipolo que forma parte de una red puede ser determinado mediante un circuito de tres ramas en paralelo que son: el dipolo en estudio, una fuente de corriente de valor igual a la corriente de cortocircuito de la red, y una resistencia de valor igual a la resistencia reflejada sobre el dipolo en estudio por la red pasivada.

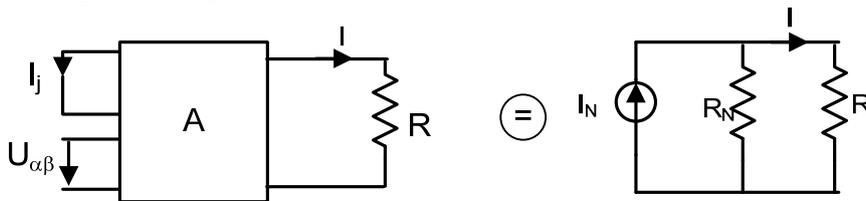


Fig. 26: Equivalente de Norton

Demostración:

Tal como se muestra en la Figura 27(a), cortocircuitamos la rama de resistencia R. En estas condiciones, por el cortocircuito circulará una corriente de valor I_{cc} (corriente de cortocircuito de la red A), y por la rama R circulará una corriente de valor cero ($I_2 = 0$).

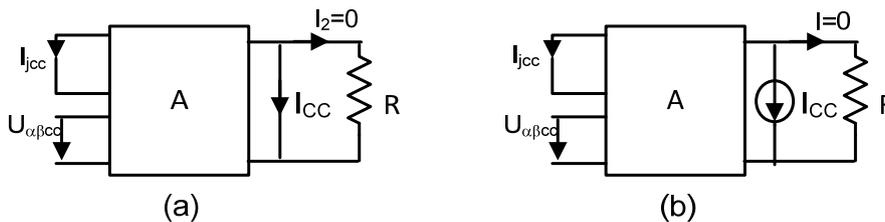


Fig. 27

Por el teorema de sustitución, si reemplazamos el cortocircuito por una fuente de corriente de valor

I_{cc} el estado de régimen del circuito no se modifica (Fig. 27(b)).

Ahora, en paralelo con la fuente de corriente, colocamos otra, que denominamos I_N , de valor numéricamente igual a la anterior, pero de sentido contrario (Fig. 28(a)). De esta forma hemos obtenido un circuito equivalente al de partida, dado que por la rama R circula nuevamente la corriente I.

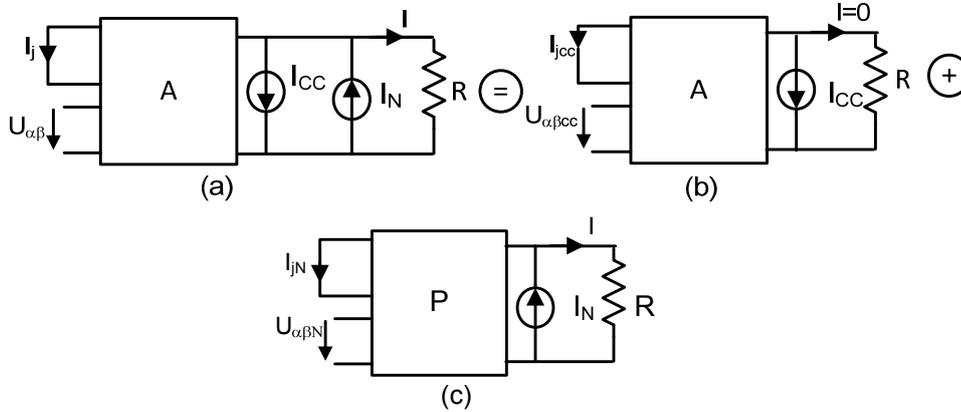


Fig. 28

El teorema de superposición nos permite calcular I mediante la suma algebraica de las corrientes generadas por cada una de las fuentes. Ahora bien, todas las fuentes del circuito, conjuntamente con I_{cc} , establecen en la rama en estudio una corriente nula (Fig. 28(b)), por lo que vemos que la corriente **real** I de la rama es la generada por la fuente de corriente de valor I_N actuando sola (Fig. 28(c)). Dado que al dipolo pasivo lo podemos reemplazar por su resistencia equivalente en condiciones de vacío, vemos que este último circuito coincide con el modelo propuesto en el enunciado del teorema.

4.8 Vínculo entre el generador equivalente de Thévenin y el de Norton

Hemos demostrado que, a los efectos de determinar el estado de régimen de una rama R perteneciente a una red N, podemos recurrir al dipolo equivalente de Thévenin o al dipolo equivalente de Norton:

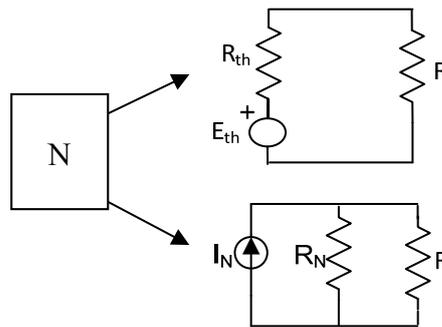


Fig. 29

Según lo visto en el Capítulo 2, ambos dipolos son equivalentes externos. Bajo esa condición, y sabiendo que, por la forma en que se calculó es $R_n = R_{th}$, podemos decir que:

$$E_{th} = R_{th} I_N = R_N I_N$$

lo cual nos permite expresar la resistencia de Thévenin como:

$$R_{th} = \frac{E_{th}}{I_N} = \frac{U_{vacio}}{I_{cc}}$$

Estas ecuaciones que surgen de la equivalencia entre el dipolo equivalente de Thevenin y el de Norton, constituyen una herramienta de análisis muy útil, tal como veremos más adelante.

4.9 Teoremas de Thévenin y Norton aplicados a circuitos con fuentes controladas

Hasta ahora vimos la aplicación del teorema de Thévenin, o del de Norton, a circuitos con fuentes independientes. Veremos ahora si dichos teoremas son igualmente aplicables cuando la red contiene fuentes controladas, y, en caso de serlo, cómo debemos proceder. Analizaremos los siguientes circuitos:

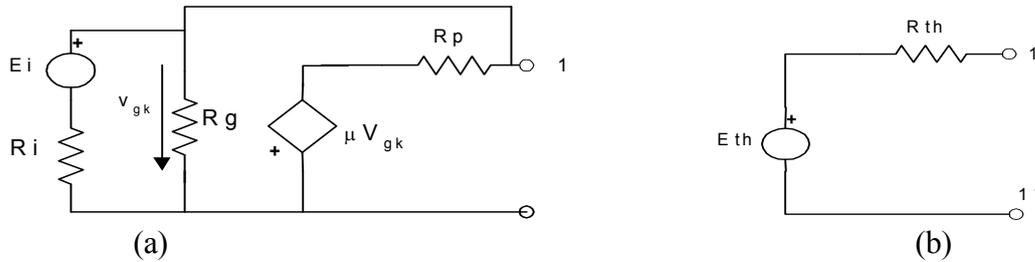


Fig. 30

¿Podemos hallar una E_{th} y una R_{th} de modo que ambos sean equivalentes externos? Supondremos que es posible, y trataremos de hallar E_{th} y R_{th} para que ello se cumpla.

Si los bornes 1 y 1' están en circuito abierto, tal como se muestra en el circuito de la fig. 30 (a), la tensión de vacío V_o entre los mismos será:

$$V_{11'(a)} = V_o = E_{th} \quad \text{ya que } V_{R_{th}} = 0$$

y, en el circuito de la figura 34 (b) será:

$$\varphi \left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_p} \right) = \frac{E_i}{R_i} - \mu \frac{V_{gk}}{R_p} \Rightarrow \varphi \left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_g} + \frac{1+\mu}{R_p} \right) = \frac{E_i}{R_i}$$

donde $V_{gk} = \varphi_g$ y $\varphi = V_{11'(b)}$

Para que ambos circuitos sean equivalentes externos, sus tensiones de vacío deben ser idénticas, es decir, $V_{11'(a)} = V_{11'(b)}$ por lo que:

$$E_{th} = E_i \frac{R_p R_g}{(1 + \mu) R_g R_i + R_p R_i + R_p R_g}$$

Si ahora cortocircuitamos 1 y 1' tendremos:

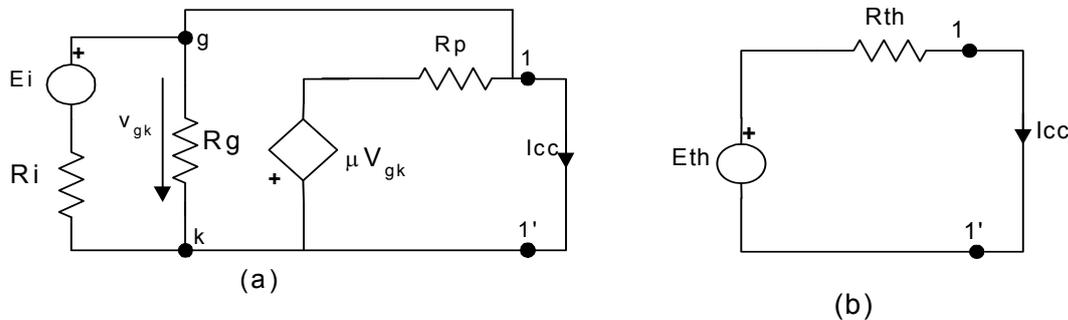


Fig. 31

En la Fig. 31(a) $I_{cc} = E_i / R_i = I_N$

En la Fig. 31 (b) $I_{cc} = E_{th} / R_{th}$

Si los circuitos son equivalentes, sus corrientes de cortocircuito deben ser idénticas, por lo que podemos plantear:

$$R_{th} = \frac{E_{th}}{I_{cc}} = \frac{E_{th}}{E_i / R_i} = \frac{R_p R_g R_i}{(1 + \mu) R_i R_g + R_p R_i + R_p R_g}$$

Si observamos esta expresión y la comparamos con la que obtendríamos con el método convencional de cálculo de R_{th} (con todas las fuentes del circuito pasivadas) vemos que hemos obtenido un resultado diferente, ya que no aparece simplemente el paralelo de R_i , R_g y R_p . Esto se debe al hecho de que no se pueden pasivar las fuentes controladas, según ya habíamos visto, dado que hacerlo implicaría alterar la topología del circuito. Por esto, aplicamos para el cálculo un método distinto. Pasivamos E_{th} en la red de la Fig. 32(b), y todas las fuentes independientes en la red de la Fig. 32(a), conectando una fuente genérica independiente de valor E_{aux} , que fuerza una corriente I_{aux} .

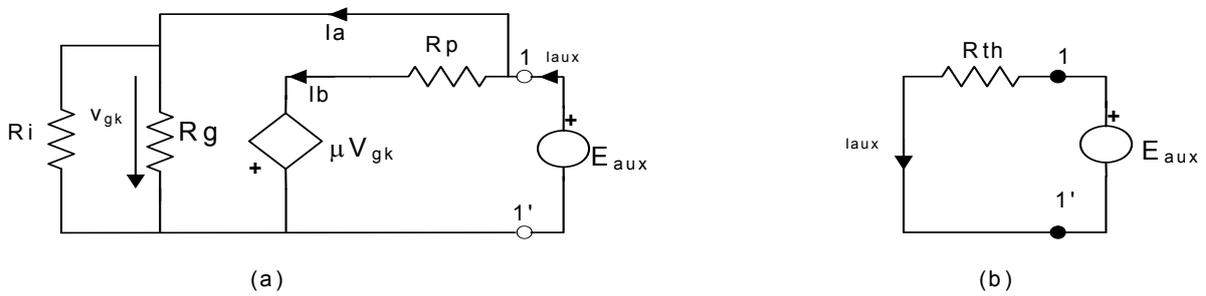


Fig. 32

Así, podemos calcular R_{th} de la siguiente forma:

en (b) $R_{th} = E_{aux} / I_{aux}$

en (a) $I_{aux} = I_a + I_b$

$$I_a = \frac{E_{aux}}{R_i R_g / (R_i + R_g)}$$

$$I_b = \frac{E_{aux} + \mu V_{gk}}{R_p} = \frac{E_{aux}(1 + \mu)}{R_p}$$

de donde:

$$I_{aux} = E_{aux} \left[\frac{R_i + R_g}{R_i R_g} + \frac{1 + \mu}{R_p} \right]$$

por lo que resulta:

$$R_{th} = \frac{E_{aux}}{I_{aux}} = \frac{R_p R_i R_g}{(1 + \mu) R_i R_g + R_i R_p + R_g R_p}$$

En resumen: Supongamos que nos interesa calcular el estado de régimen de un dipolo conectado entre A y B a una red que posee fuentes independientes (F.I.) y fuentes controladas (F.D.):

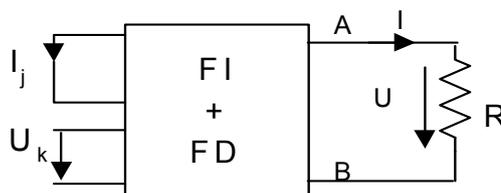


Fig. 33

1) **Cálculo de E_{th} (o I_N):** Para ello desconectamos (o cortocircuitamos) la rama AB, dejando todas las fuentes del circuito (independientes y controladas) (Fig. 34(a)).

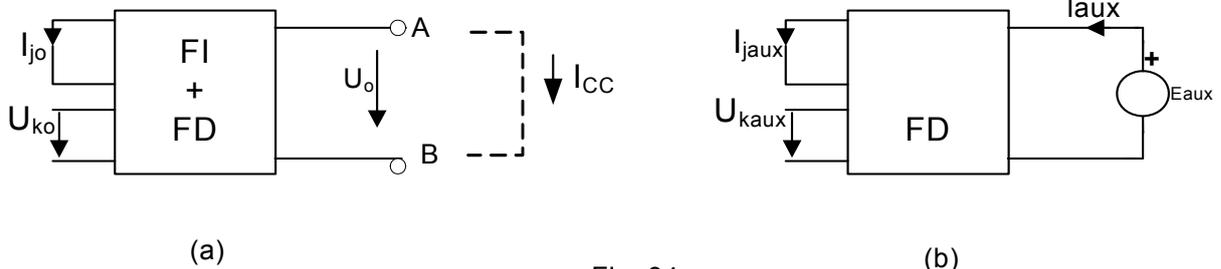


Fig. 34

2) **Cálculo de R_{th} :** Pasivamos **exclusivamente** las fuentes independientes. A los efectos de que las fuentes controladas puedan actuar y se conecta una fuente genérica de valor E_{aux} , que entrega al dipolo una corriente de valor I_{aux} . Recordando que la resistencia vista desde un par de bornes se podía calcular como $R_{AB} = U_{AB}/I_{AB}$ será (Fig. 34(b))

$$R_{th} = \frac{E_{aux}}{I_{aux}}$$

3) **Se construye el dipolo equivalente**

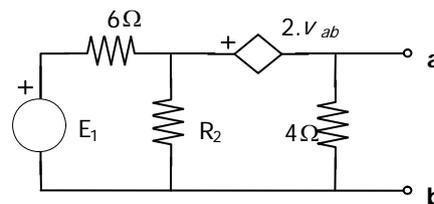
Nota: A los efectos del cálculo de R_{th} , y recordando que los dipolos de Thévenin y Norton son equivalentes externos, también pudimos haber calculado I_{cc} a partir de:

$$R_{th} = R_n = \frac{E_{th}}{I_N}$$

Ejercicio:

1) **Sobre el circuito de la figura se realizaron dos ensayos, con los siguientes resultados:**

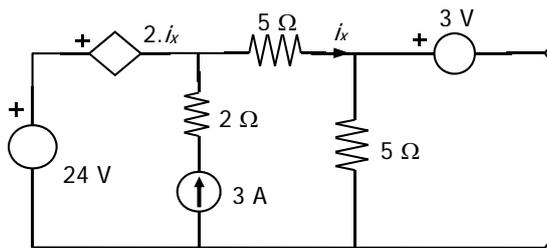
1. En vacío: $V_{ab} = \frac{4}{5} V$
2. En cortocircuito: $I_{ab} = 1 A$



Obtener los valores de R_2 y E_1 . Representar el equivalente de Thévenin del circuito.

Rta: $E_1 = 6 V$; $R_2 = 6 \Omega$

2) **Obtener el equivalente de Thévenin del circuito de la figura.**



Rta: $E_{TH} = 7 V$; $R_{TH} = 2,9167 \Omega$

4.10 Teorema de máxima transferencia de potencia

La principal función de numerosos sistemas eléctricos es, en principio, transferir potencia a una carga. Ahora bien, dado que la transferencia tiene como uno de sus parámetros característicos la tensión de circuito abierto, cabe preguntarse como puede maximizarse la potencia absorbida por una carga. Así planteado el problema, caben dos posibilidades: que sea variable la resistencia de la fuente o que sea variable la resistencia de carga de manera de maximizar la potencia entregada a la carga.

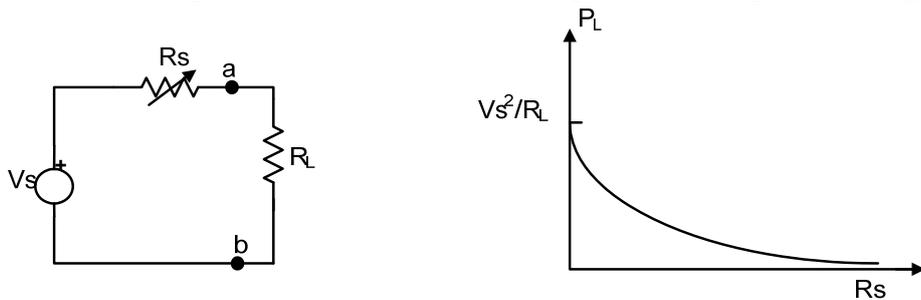


Fig. 35

Supongamos que la resistencia de carga R_L y la tensión de vacío V_s están especificadas, y que la resistencia de salida R_s de la fuente de alimentación es ajustable. Si observamos la Fig. 35, vemos que la corriente es:

$$I = \frac{V_s}{R_s + R_L}$$

Luego, la potencia absorbida por la carga es:

$$P_L = R_L I^2 = \frac{R_L}{(R_s + R_L)^2} V_s^2 \quad (*)$$

La potencia en la carga P_L es una función de la resistencia de la fuente, R_s , y como solo aparece en el denominador, esta función se maximiza obviamente cuando:

$$R_s = 0$$

El segundo caso, más interesante, ocurre cuando están especificadas la tensión de circuito abierto V_s y la resistencia de salida R_s de la red de alimentación, y el diseñador tienen plena libertad para elegir el valor de resistencia de carga, tal como se indica en la Figura 36.

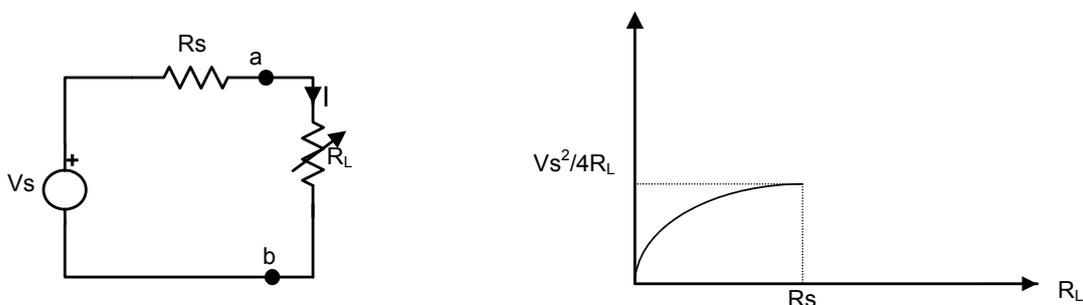


Fig. 36

La expresión de la potencia en la carga es, naturalmente, la misma que vimos antes (Ecuación (*)).

El máximo de P_L ocurre, obviamente, dentro del intervalo $0 \leq R_L \leq \infty$ y puede hallarse si derivamos P_L respecto a R_L e igualamos a cero. Dicha derivada nos conduce a:

$$\frac{d P_L}{d R_L} = \frac{(R_s + R_L)^2 - 2 R_L (R_s + R_L)}{(R_s + R_L)^4} V_s^2 = 0$$

Esta ecuación queda satisfecha por:

$$R_L = R_s$$

resultado que da origen al teorema de máxima transferencia de potencia:

Cuando la resistencia de fuente es fija, y puede elegirse el valor de la resistencia de carga, la máxima potencia absorbida por la carga se dará bajo la condición de que ambas resistencias sean iguales, condición que también puede expresarse diciendo que ambas están adaptadas.

La sustitución de $R_L = R_s$ en la expresión de la potencia nos da la máxima potencia en la carga para R_s y V_s fijas:

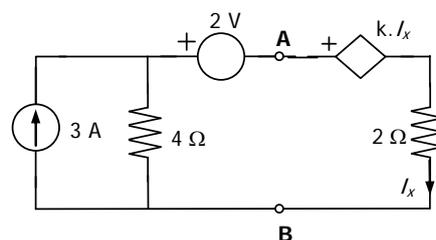
$$P_{L_{\max}} = \frac{V_s^2}{4 R_s}$$

En otras palabras, podemos decir que habrá máxima transferencia de potencia a una carga cuando la resistencia de la misma iguale a la resistencia de Thevenin de la red de alimentación.

Comentario: Desde el punto de vista del diseño de redes eléctricas, nunca se adaptan resistencias, dado que la energía perdida en la resistencia de Thevenin del sistema igualara a la energía entregada a la carga, con lo cual el rendimiento del sistema estará en un 50 %. La adaptación de resistencias (o de impedancias), es común en electrónica, dado que interesa tener la máxima potencia en la carga.

Ejercicio:

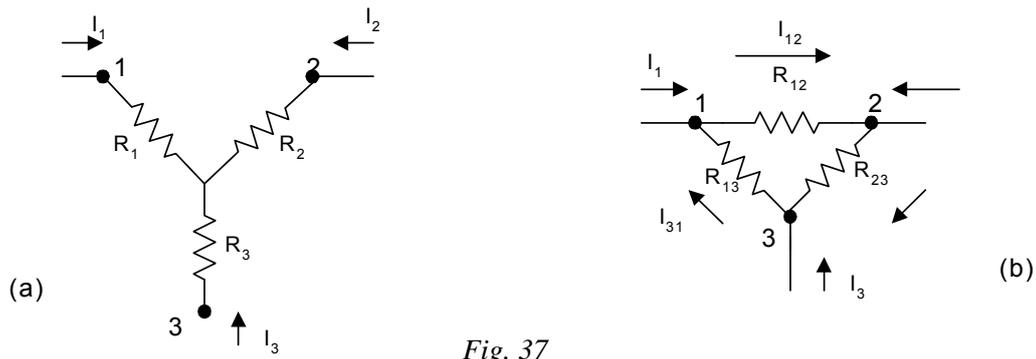
*Determinar el valor de k para que el circuito a la izquierda de **A-B** entregue máxima potencia al circuito de la derecha.*



Rta: $k = 2 \text{ V/A}$

4.11 Transfiguración estrella / triángulo - triángulo / estrella (transformación de Kennelly)

La disposición de tres ramas en una red como la mostrada en la Figura 37(a) se conoce como conexión **estrella**, y la de la Figura 37(b), como conexión **triángulo**. Tanto la estrella como es triángulo están vinculados al resto del circuito a través de los nudos 1, 2 y 3.



Es frecuente la necesidad de reducir una red dada a un esquema más simple transfigurando una estrella en un triángulo, o viceversa. Si esta conversión se hace de forma que los nudos en el circuito original y el transformado mantengan sus potenciales y las corrientes que fluyen a los mismos son las primitivas, el resto de la red no "verá" la transformación. Obtendremos, entonces, las expresiones de paso de una a otra configuración.

Comenzaremos por escribir las ecuaciones de I_1 , I_2 e I_3 en una estrella y en un triángulo en función de las d.d.p. y las conductancias de las ramas:

$$\text{Para la estrella: } I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Pero: } I_1 = (\varphi_1 - \varphi_0) g_1 \quad I_2 = (\varphi_2 - \varphi_0) g_2 \quad I_3 = (\varphi_3 - \varphi_0) g_3 \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1), tendremos:

$$\varphi_1 g_1 + \varphi_2 g_2 + \varphi_3 g_3 - \varphi_0 (g_1 + g_2 + g_3) = 0$$

Despejamos φ_0 :

$$\varphi_0 = \frac{\varphi_1 g_1 + \varphi_2 g_2 + \varphi_3 g_3}{g_1 + g_2 + g_3}$$

Reemplazamos φ_0 en la ecuación de I_1 :

$$I_1 = (\varphi_1 - \varphi_0) g_1 = \frac{[\varphi_1 (g_2 + g_3) - \varphi_2 g_2 - \varphi_3 g_3] g_1}{g_1 + g_2 + g_3}$$

Por inspección del triángulo en la Fig. 37, resulta ser:

$$I_1 = I_{12} - I_{31} = (\varphi_1 - \varphi_2) g_{12} - (\varphi_3 - \varphi_1) g_{13} = \varphi_1 (g_{12} + g_{13}) - \varphi_2 g_{12} - \varphi_3 g_{13}$$

Dado que I_1 en la Fig. 37(a) debe ser igual a la de la Fig. 37(b) para cualquier valor de φ_1 , φ_2 y φ_3 , vemos que los coeficientes de φ_2 en las ecuaciones deben ser iguales, ocurriendo lo mismo para los otros términos. Consecuentemente:

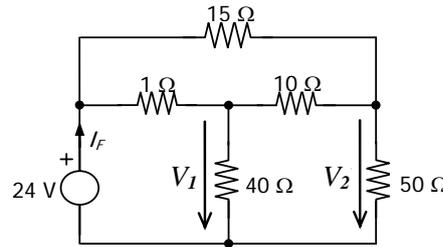
$$g_{12} = \frac{g_1 g_2}{g_1 + g_2 + g_3} \quad g_{13} = \frac{g_1 g_3}{g_1 + g_2 + g_3} \quad g_{23} = \frac{g_2 g_3}{g_1 + g_2 + g_3}$$

Un desarrollo similar nos conduce a la expresión que nos da las resistencias de cada rama de la estrella en función de las resistencias de los lados del triángulo:

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad R_2 = \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad R_3 = \frac{R_{13}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

Ejercicio:

- a) Mediante transfiguración estrella-triángulo (Y-Δ), hallar I_F .
- b) Calcular V_1 y V_2 .



Rta: a) $I_F = 1\text{ A}$; b) $V_1 = 23,2\text{ V}$; $V_2 = 21\text{ V}$.

4.12 Redes con condiciones de simetría

Hay casos en que las condiciones de simetría de la red nos permiten obtener el valor de resistencia de entrada simplemente por inspección visual. El siguiente es un ejemplo en el cual las ramas se hallan dispuestas como las doce aristas de un cubo. Supongamos que todas las ramas son resistencias de $1\ \Omega$, y queremos calcular la resistencia vista:

- a) entre los vértices de la diagonal de cualquiera de los lados del cubo.
- b) entre los vértices de la diagonal del cubo.

El grafo puede mostrarse en forma plana, tal como se ve en la Figura 38(a). La Figura 38(a) la utilizaremos para calcular R_{ad} (item a), y la Figura 39 para calcular R_{ac} (item b).

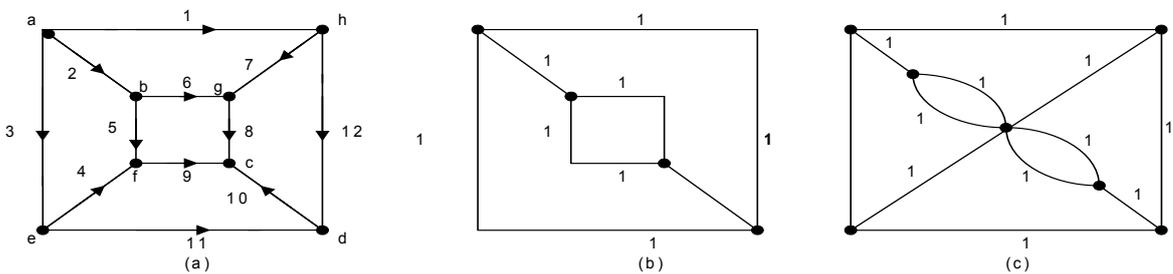


Fig. 38: Redes con condiciones de simetría

a) Como se trata de calcular la resistencia vista desde los extremos de la diagonal de una de las caras del cubo, supondremos que se inyecta corriente por el nudo a, y se saca por el nudo d. Por la simetría de la red podemos decir que los nudos e, f, g, h están al mismo potencial, lo cual implica que el potencial de dichos nudos será igual a la media aritmética de la d.d.p. entre los nudos a y d. Por lo tanto, las corrientes en las ramas 4 y 7 son 0, lo que implica que aun modificando la topología de la red, no se altera el régimen de circulación de corrientes entre dichos puntos. Si sacamos estas ramas, queda el circuito de la Fig. 38(b).

$$R_{ad} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{3}{4} \Omega$$

También podemos utilizar la condición de que e, f, g h están a igual potencial, por lo que podemos cortocircuitarlos (Fig. 38(c)), de donde:

$$R_{ad} = 2 \left[1 // 1 // \left(1 + \frac{1}{2} \right) \right] = \frac{3}{4} \Omega$$

b) Supongamos ahora que la corriente entra por el nudo a y sale por c. Bajo estas condiciones, la simetría de la red nos permite ver que las corrientes 1,2,3 y 8,9,10 serán las mismas. Consecuentemente, los nudos b,e, y h están a igual potencial, y pueden unirse entre si, situación que se repite para los nudos f, g, d los cuales también pueden unirse. Con esto, vemos que el grafo de la red se modifica, y resulta el siguiente:

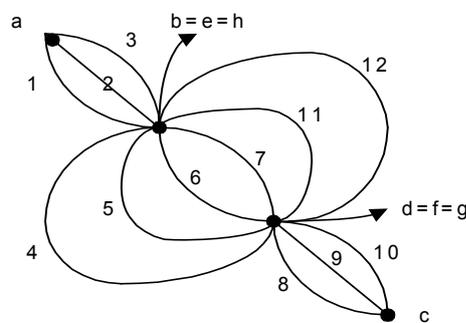


Fig. 39

De esta manera, R_{ac} se calcula como:

$$R_{ac} = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = \frac{5}{6} \Omega$$

El esquema podría complicarse aun mas, agregando ramas diagonales adicionales de 1Ω dentro del cubo, por ejemplo entre a y c, f y h, e y g o b y d. El proceso es el mismo de antes, dado que por la simetría de la red los nudos b, e h están a igual potencial, así como los nudos d, f, g de donde el grafo de la Figura 39 se aplica con la salvedad de agregar las ramas adicionales de 1Ω , siendo:

$$R_{ac} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3}}}} = \frac{7}{16} \Omega$$

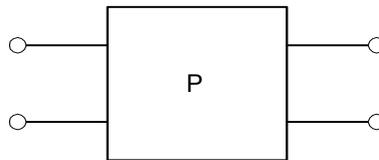
Vemos así que en el análisis de ciertas redes se pueden hacer simplificaciones al descubrir ramas por las cuales la corriente es cero dado que al quitar estas ramas es frecuente poder resolver la red por simple inspección. En forma análoga, el descubrir que dos nudos están a igual potencial permite cortocircuitarlos, lo cual agiliza el proceso de resolución.

Nota: Hablamos de redes "balanceadas" o "desbalanceadas" con referencia a su simetría o asimetría

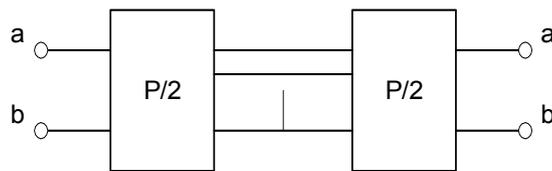
respecto a una línea horizontal (escalera desbalanceada), mientras que los términos "simétrico" o "asimétrico", aplicados a circuitos con dos pares de terminales de acceso, se refieren a la simetría o disimetría respecto a un eje vertical.

4.13 Teorema de Bartlett o de bisección

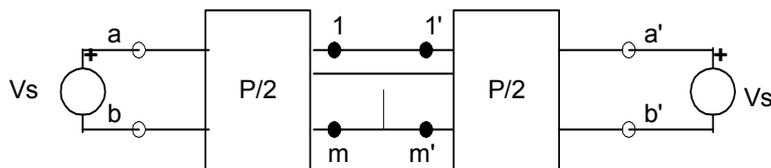
El teorema de bisección fue publicado por Bartlett en 1930, y es útil para la obtención de redes equivalentes y para el cálculo de la resistencia característica de redes simétricas a través del planteo de que las redes que tienen simetría especular pueden reducirse a una estructura equivalente más simple. Supongamos tener un cuadripolo como el siguiente:



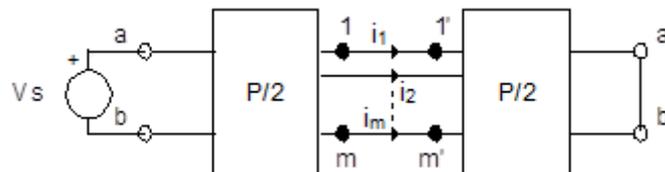
el cual es simétrico en sus elementos pasivos respecto a su eje vertical (eje estructural). Esa simetría puede visualizarse en la siguiente forma:



Al bisectar la red, han aparecido un cierto número de terminales en la unión de las dos mitades. Supongamos ahora alimentar con una fuente de tensión $V_{ab} = V_{a'b'} = V_s$

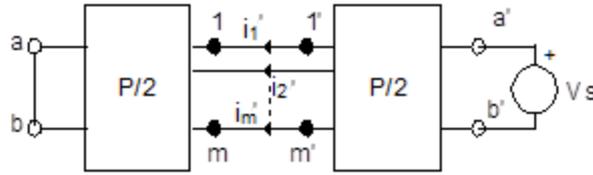


Dado que se trata de una red lineal, puede calcularse la corriente circulante por las ramas "cortadas" por el eje de simetría mediante el principio de superposición. Pasivando la fuente de tensión de derecha, se tiene:



Puede observarse que debido al efecto de la fuente de valor V_s circularán por las ramas antes mencionadas corrientes de valor i_1, i_2, \dots, i_m

Pasivando ahora la fuente de la izquierda, tenemos:

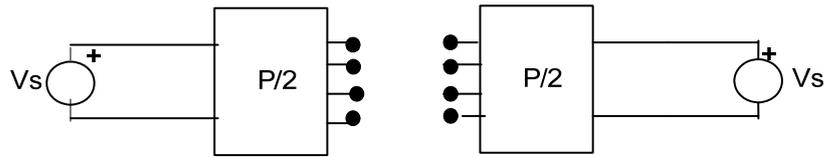


Análogamente a lo anterior, se observa que por las ramas que cortan al eje de simetría circulan corrientes i_1', i_2', \dots, i_m' . Dichas corrientes tienen la misma intensidad que i_1, i_2, \dots, i_m pero sentido opuesto (nótese que se trata del mismo circuito pero “espejado”).

Haciendo la superposición tomando como sentido positivo de circulación el de las corrientes i_1, i_2, \dots, i_m (sin primar), resulta:

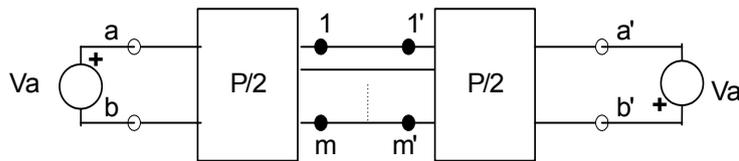
$$\begin{cases} i_1 - i_1' = 0 \\ i_2 - i_2' = 0 \\ \vdots \\ i_m - i_m' = 0 \end{cases}$$

Por lo expuesto anteriormente deducimos que por todas aquellas ramas que corten al eje de simetría no circulará corriente, de donde podemos decir que la red se ha transformado en:



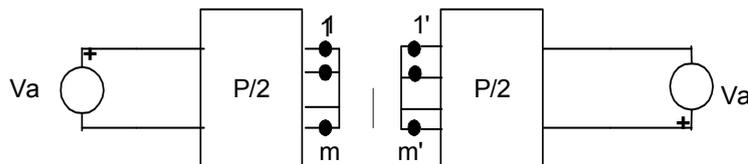
Llamamos a V_s "excitación simétrica"

Ahora supongamos alimentar con $V_{ab} = -V_{a'b'} = V_a$



Llamamos a V_a "excitación antisimétrica"

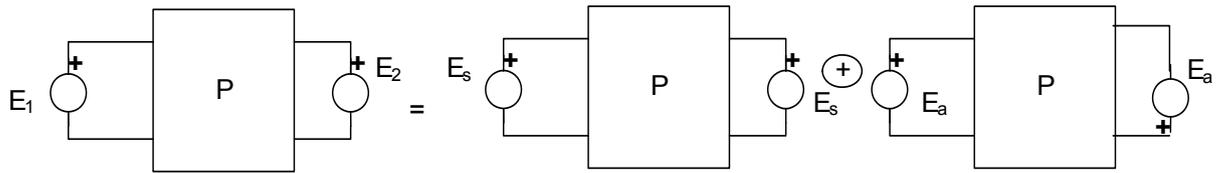
Tal como antes, por la simetría de la red, vemos que ahora los potenciales de los puntos que están sobre el eje de simetría son iguales, y dado que $U_{12} = -U_{1'2'}$, su suma da cero, por lo que pueden ser cortocircuitados, con lo que la red se transforma en:



Si tenemos a la red original alimentada por dos fuentes E_1 y E_2 , por el teorema de superposición podemos suponerlas descompuestas en:

$$E_1 = E_s + E_a$$

$$E_2 = E_s - E_a$$



Sumando ambas, tenemos

$$E_1 + E_2 = 2 E_s \Rightarrow E_s = \frac{E_1 + E_2}{2} :$$

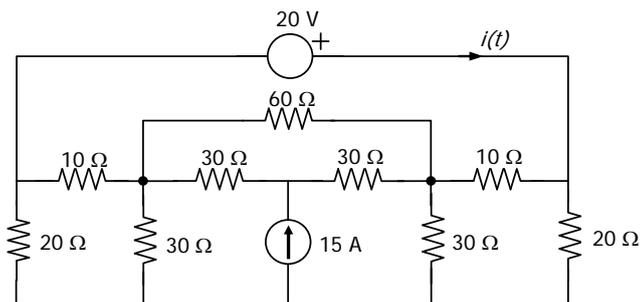
Restando ambas, se tiene:

$$E_1 - E_2 = 2 E_a \Rightarrow E_a = \frac{E_1 - E_2}{2}$$

Vemos así que la aplicación del teorema de bisección conduce a simplificaciones en la red que agilizan la resolución del circuito, frecuentemente por simple inspección del mismo.

Ejercicio:

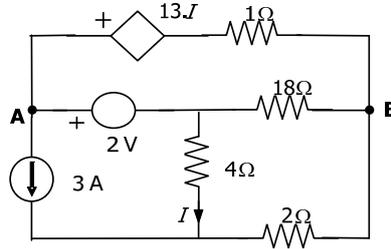
Calcular el valor de $i(t)$.



Rta: $i(t) = 1 \text{ A}$

Ejercicios adicionales

1) Calcular U_{AB} e I mediante el teorema de superposición.

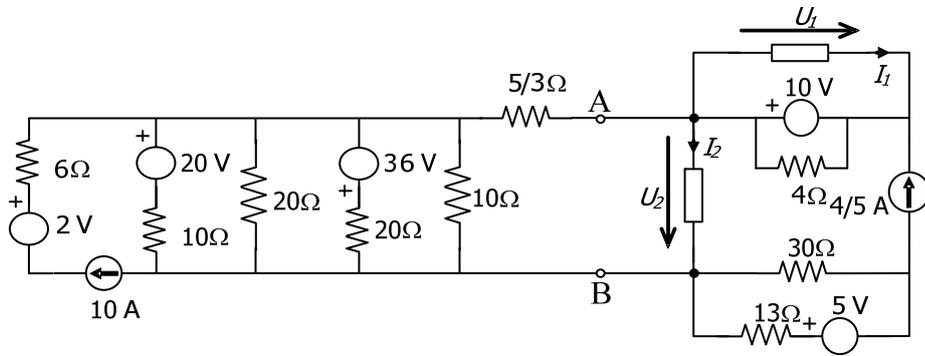


Rta: $U_{AB} = 20\text{ V}; I = 2\text{ A}$

2) Dado el siguiente circuito, se pide:

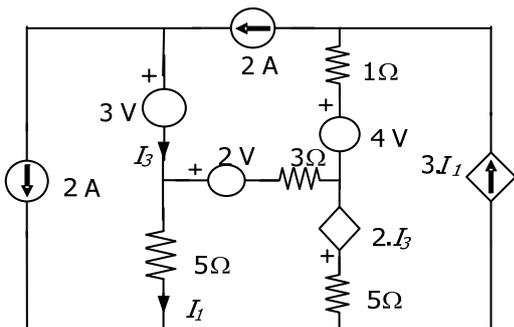
- a) Hallar, por aplicación del teorema de Millman, un dipolo equivalente al circuito de la izquierda de los bornes A-B.
- b) Determinar el estado de régimen (puntos de trabajo) de los dipolos L_1 y L_2 , a partir de sus respectivas características Volt-Ampere.

L_1 : Dipolo simétrico, con: $U_1 = 2I_1^2 + 2I_1 \quad \forall I_1 \geq 0$ $L_2: U_2 = \begin{cases} I_2^2 + I_2 & \forall I_2 \geq 0 \\ 3I_2^2 + 5I_2 & \forall I_2 < 0 \end{cases}$

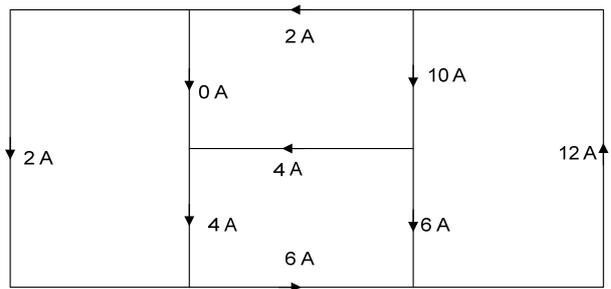


Rta: b) $Q_1 = (10\text{ V}; 1,791\text{ A}); Q_2 = (18,725\text{ V}; 3,856\text{ A})$

3) Calcular todas las corrientes y tensiones de rama, aplicando el teorema de superposición.



Rta:



4) En el circuito de la Figura P7, hallar la corriente I_F y la potencia entregada por la fuente, aplicando transformación $Y \leftrightarrow \Delta$.

Rta: $I_F = 0,5 \text{ A}$; $P = 20 \text{ W}$.

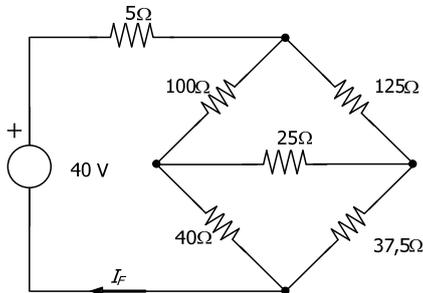


Fig. P 7

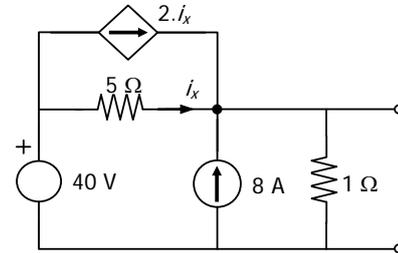
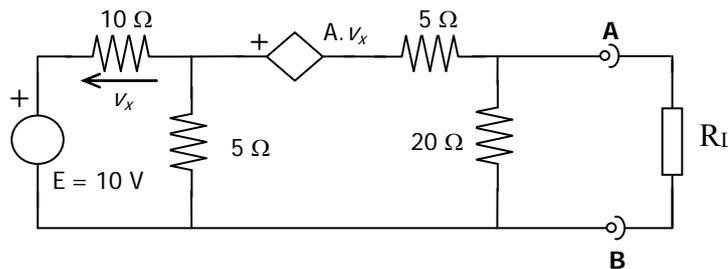


Fig. P 8

5) Hallar el equivalente de Norton del circuito de la figura P8.

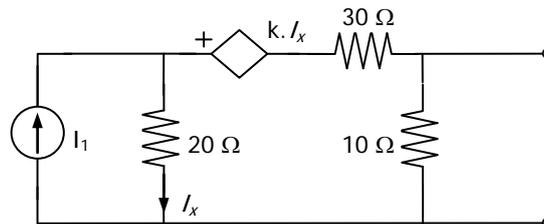
Rta: $I_N = 32 \text{ A}$; $R_N = 0,625 \Omega$.

6) a) Hallar A de manera que la potencia transferida a la carga $R_L = 100 \Omega$ sea máxima.
b) Representar el dipolo AB mediante su equivalente de Norton.



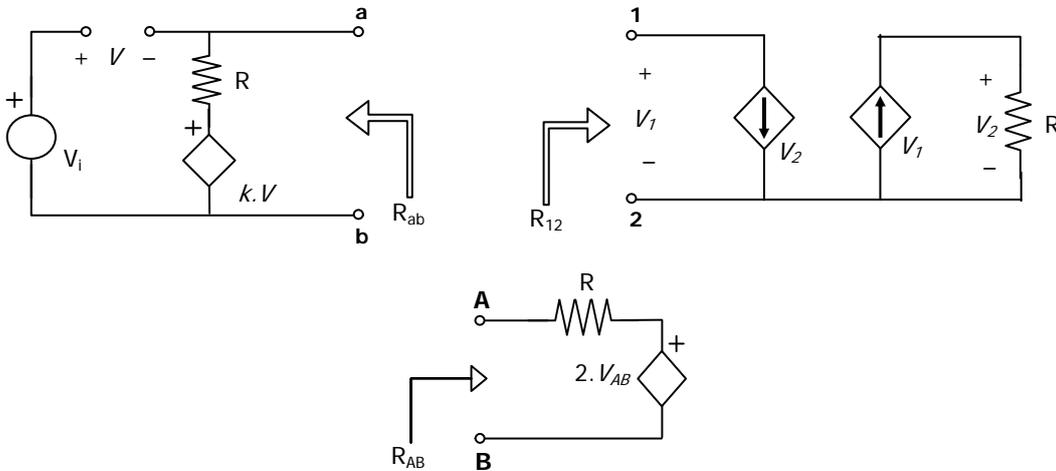
Rta: **a)** $A = 10$; **b)** $I_N = 2,8 \text{ A}$; $R_N = 100 \Omega$.

7) En el siguiente dipolo, ajustar los valores de k e I_1 para obtener un equivalente de Thévenin con $E_{Th} = 12 \text{ V}$ que entregue máxima potencia a una carga resistiva $R_L = R_{th} = 60 \Omega$.



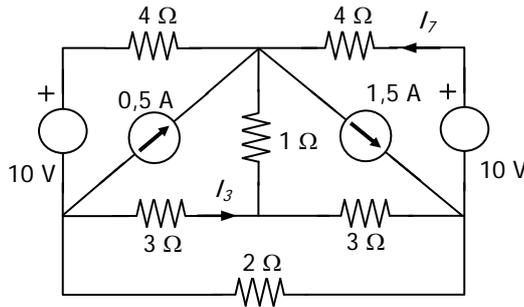
Rta: $k = 62 \text{ V/A}$; $I_1 = 57 \text{ mA}$.

8) Calcular la resistencia vista desde los terminales indicados, analizando en cada caso los resultados obtenidos.



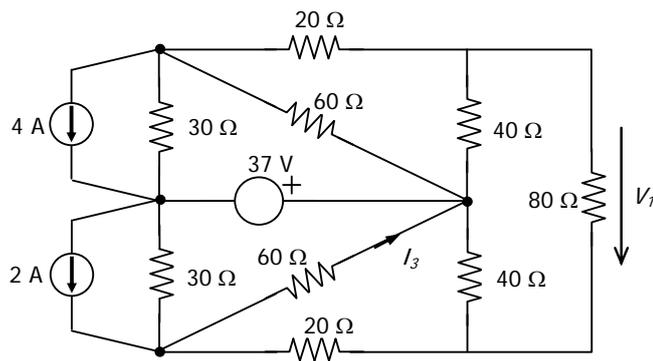
Rta: $R_{ab} = R / (1 + k)$; $R_{12} = 1/R$; $R_{AB} = (-1/R)$

9) Obtener el valor de las corrientes I_3 e I_7 aprovechando las características de simetría del circuito.



Rta: $I_3 = -1,099 \text{ A}$; $I_7 = 1,547 \text{ A}$.

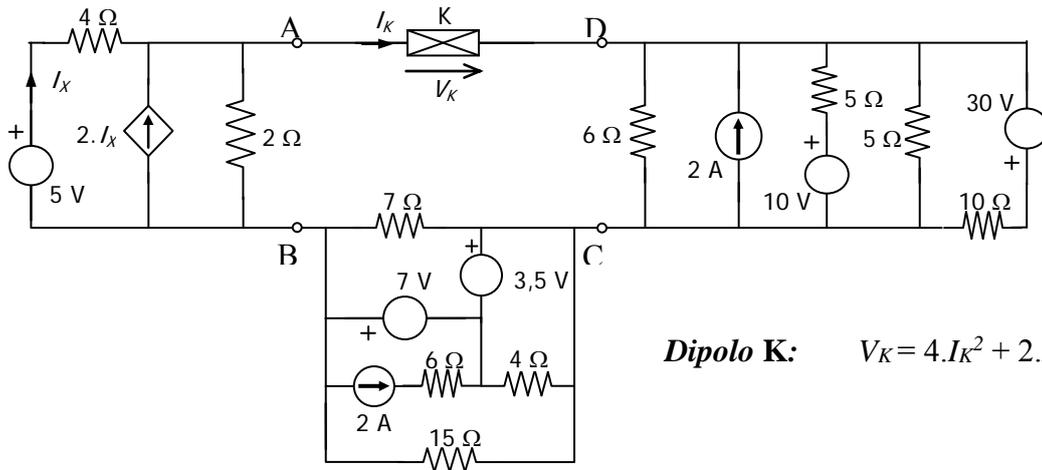
10) Hallar el valor de V_1 .



Rta: $V_1 = -40 \text{ V}$.

11) Dado el circuito de la figura, se pide:

- Hallar el equivalente de Thévenin y de Norton del dipolo AB.
- Mediante el teorema de Millman, calcular un equivalente del dipolo CD.
- Reducir hasta su forma más simple el dipolo BC.
- Calcular el punto de trabajo del dipolo **K** (AD).
- Aplicando sustitución, calcular la corriente I_x .



Dipolo K: $V_K = 4.I_K^2 + 2.I_K \quad \forall I_K \geq 0$

- Rta: a) $E_{TH} = 3V \quad R_{TH} = 0,8\Omega$ b) $E_{eq} = 1,5V \quad R_{eq} = 1,5\Omega$
 c) $E_{BC} = 3,5V$ d) $Q_K = (3,383 V; 0,703 A)$;
 e) $I_X = 0,6406 A$.

12) En el circuito mostrado, L es un dipolo anómalo simétrico cuya relación Volt-Ampere es $U_L = 0,4.I_L^2 + 0,5.I_L \quad \forall I_L \geq 0$. Determinar las corrientes de todas las ramas de la red.

Rta: $Q_L = (3,75 V; 2,5 A)$

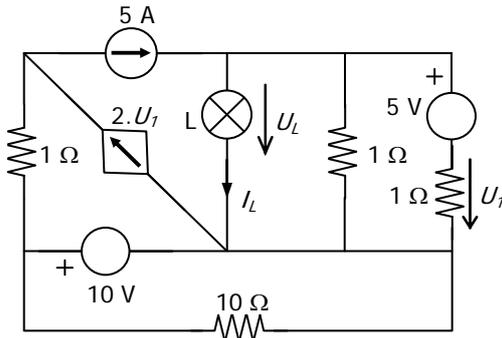


Fig. P 11

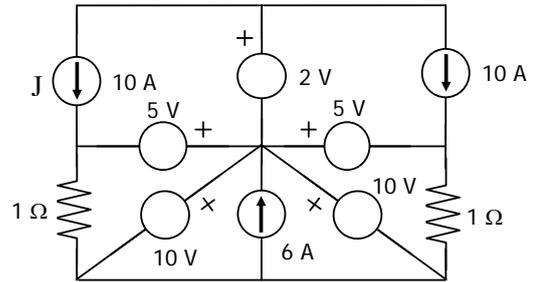


Fig. P 12

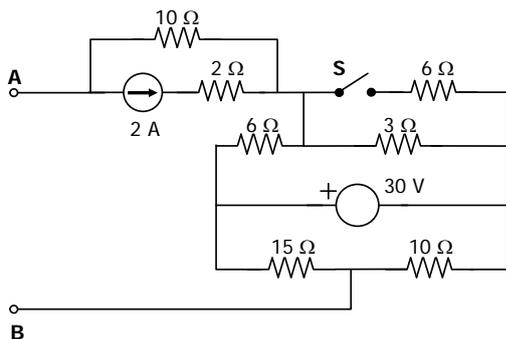
13) En el circuito de la Fig. P 12, aplicando algunos de los teoremas conocidos se pide:

- a) Determinar todos los potenciales y las corrientes del circuito.
 b) Suponiendo que la fuente J aumenta su valor un 10%, hallar el nuevo estado de régimen.

14) a) Calcular el circuito equivalente del dipolo A-B, con S abierto.

b) Conectar entre A y B una carga $R_C = 4\Omega$ y hallar el punto de trabajo de la misma.

c) Hallar la variación de la corriente a través de R_C , producida al cerrarse el interruptor S.



Nota: Es importante optimizar el método de resolución.

Rta: **a)** $E_{Th} = -22 \text{ V}$; $R_{Th} = 18\Omega$; **b)** $Q_R = (4 \text{ V}; 1 \text{ A})$; **c)** $\Delta I_C = 0,1396 \text{ A}$.

15) Usando el Teorema de Bisección, hallar las corrientes de todas las ramas si $I = 4 \text{ A}$.

